ТЕОРІЯ

БАЛЛИСТИКИ,

СОДЕРЖАЩАЯ

ПРИЛОЖЕНІЕ МАТЕМАТИЧЕСКАГО АНАЛИЗА КЪ ОПРЕДѢЛЕНІЮ РАЗЛИЧНЫХЪ ОБСТОЯТЕЛЬСТВЪ, СОПРОВОЖДАЮЩИХЪ ДВИЖЕНІЕ ТЯЖЕЛЫХЪ ТѢЛЪ, БРОШЕННЫХЪ КАКОЮ НИБУДЬ СИЛОЮ,

составленная

Экстраординарнымъ Профессоромъ Анкудовичемъ,
для руководства въ старшемъ Офицерскомъ классѣ
Артиллерійскаго Училища.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
Печатано въ Типографіи Штаба Отдѣльнаго Корпуса
Внутренней Стражи.
1836.

Печатать позволяется

съ тѣмъ, чтобы по напечатаніи представлены были въ Цензурный Комитетъ *три* экземпляра. С. Петербургъ. 19 *Февраля*, 1836 года.

Цензоръ *П. Корсаковъ.*

Всесоюзная библиотека имени В. И. Ленина
34352-45.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стран.

Предварительныя понятія 1

ГЛАВА I. О параболическомъ движеніи тѣлъ, бросаемыхъ изъ Артиллерійскихъ орудій.

Путь брошеннаго тѣла въ пустотѣ есть парабола.
Выводъ общихъ формулъ параболическаго движенія 4
О горизонтальной дальности полета снарядовъ . . 15
О наибольшей высотѣ полета снарядовъ 23
Объ·углѣ возвышенія орудія 26
α) Первое положеніе предмета, когда онъ находится выше горизонта дула орудія. . 27
β) Второе положеніе предмета, когда онъ будетъ ниже горизонта орудія 30
γ) Третіе положеніе предмета, когда онъ находится на одномъ съ орудіемъ горизонтѣ 32
Примѣчательное свойство, относительно суммы двухъ угловъ бросанія, принадлежащихъ одинакому заряду 33
О силѣ бросанія снарядовъ, или начальной ихъ скорости зависящей отъ силы пороха 37
О времени полета снарядовъ 43

Стран.

О скорости, съ которою снарядъ ударяетъ въ предметъ. 44

Формулы для рѣшенія задачъ, относящихся къ Артиллерійскому прицѣлу. 46

Таблицы, показывающія высоты привѣснаго прицѣла у легкихъ, батарейныхъ и осадныхъ мѣдныхъ пушекъ и единороговъ, при различномъ углѣ прицѣливанія и углѣ возвышенія и склоненія мѣстности 57

Вычисленіе рикошетныхъ выстрѣловъ по параболической Теоріи. 59

ГЛАВА II. О движеніи тяжелыхъ тѣлъ въ воздушномъ пространствѣ.

Недостатки параболической Теоріи 77

Общіе законы сопротивленія жидкихъ тѣлъ. Сопротивленіе на прямыя поверхности. Причины несогласія выводовъ находимыхъ по Теоріи и по опытамъ. 79

Сопротивленіе жидкости на кривыя поверхности тѣлъ вращенія, движущихся по направленію своей оси. 96

Правила, извлеченныя Гютономъ изъ опытовъ, касательно сопротивленія оказываемаго воздухомъ на движущіяся тѣла 101

Таблица составленная Гютономъ и показывающая сопротивленія воздуха, найденныя по опытамъ при различныхъ скоростяхъ. 106

Приложеніе предъидущей Теоріи сопротивленія къ прямолинейному движенію снарядовъ въ воздухѣ 114

Стран.

Таблица показывающая поперечники, средній вѣсъ и плотности ядеръ, бомбъ и гранатъ. . . 122
О вертикальномъ движеніи тяжелыхъ тѣлъ въ воздухѣ въ двухъ случаяхъ, когда онѣ свободно падаютъ и когда брошены будутъ снизу вверхъ 133
Таблица показывающая самыя большія окончательныя скорости нашихъ снарядовъ свободно падающихъ въ воздухѣ 140
Вычисленіе прицѣльныхъ выстрѣловъ. 153
Вычисленіе отлогихъ рикошетныхъ выстрѣловъ въ сопротивляющемся воздухѣ. 170

О навѣсныхъ выстрѣлахъ.

I) Выводъ общихъ формулъ для вычисленія навѣсныхъ выстрѣловъ 186
II) Свойства кривой линіи полета въ воздухѣ . 200
III) Построеніе кривой линіи полета, и составленіе таблицъ для употребленія при бросаніи бомбъ 212
IV) Объ углѣ возвышенія, соотвѣтствующемъ самой большой горизонтальной *дальности* бросанія 241
Таблица составленная Гютономъ, по способу Ньютона, и показывающая углы возвышенія, подъ коими происходитъ самая большая дальность полета 249
V) Уравненіе кривой линіи описываемой снарядомъ, брошеннымъ подъ небольшимъ угломъ возвышенія 252
Вычисленіе рикошетныхъ выстрѣловъ отлогихъ и крутыхъ по предъидущей Теоріи 261

Страп.

ГЛАВА III. О разныхъ способахъ опредѣлять начальную скорость, бросаемыхъ изъ орудій снарядовъ.

1) Опредѣленіе начальной скорости по способу Робинса и Гютона 271
Опредѣленіе длины сильнѣйшаго заряда или такого, который сообщаетъ ядру самую большую начальную скорость 288
Таблица вычисленная Гютономъ и показывающая въ калибрахъ длины сильнѣйшихъ зарядовъ, и соотвѣтствующія начальныя скорости ядеръ . 291
2) Опредѣленіе начальной скорости изъ дальности полета снарядовъ, по способу Ломбара . 293
Таблица начальныхъ скоростей соотвѣтствующихъ разнымъ зарядамъ, для 12-ти фунтовой пушки, для $\frac{1}{3}$ пудоваго единорога и для 18-ти фунтовой пушки. 300
3) Опредѣленіе начальной скорости по способу Маттея 305
4) Приближительный способъ опредѣлять начальную скорость бомбъ изъ замѣченныхъ, по выстрѣлѣ, горизонтальной дальности и времени ихъ полета. 307
5) О балистическомъ маятникѣ 309
О центрѣ тяжести и центрѣ качанія балистическаго маятника. 315
Вычисленіе скорости ядра 319
Вычисленіе скорости ядра изъ отдачи пушки. 337
Результаты, найденные по опытамъ Гютона . 345
Прибавленіе первое къ § 101. 349
Таблицы составленныя для бросанія бомбъ изъ

Стран.

5-ти и 2-хъ пудовыхъ мортиръ, возвышенныхъ на 45 градусовъ. 353

Прибавленіе второе. О способѣ интерполяціи и приложеніи онаго къ составленію таблицъ до практики Артиллерійской касающихся . . . 359

Таблицы составленныя для бросанія гранатъ изъ $\frac{1}{3}$ пудовыхъ и 6-ти фунтовыхъ мортиръ, возвышенныхъ на 45 градусовъ 372

ТЕОРІЯ

БАЛИСТИКИ.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ ПОНЯТІЯ.

§ 1. *Балистика* есть наука о движеніи тяжелыхъ тѣлъ, брошенныхъ по какому ни есть направленію.

Балистика получила свое названіе отъ машинъ, употребляемыхъ въ древнія времена для метанія на дальное разстояніе каменьевъ, зажигательныхъ тѣлъ, копьевъ и проч. и именуемыхъ *балистами.* Но когда извѣстнымъ сдѣлалось употребленіе пороха, то сіе названіе перешло къ Теоріи броеанія изъ Артиллерійскихъ орудій снарядовъ, произведеннаго дѣйствіемъ воспаленнаго въ самыхъ орудіяхъ пороховаго заряда.

§ 2. Предположивъ, что дѣйствіе пороховой

силы на снарядъ прекращается при вылетѣ его изъ жерла орудія, и принявъ точку сего вылета за начало движенія снаряда, Балистика представляетъ слѣдующій вопросъ : *опредѣлить всѣ обстоятельства движенія тяжелаго тѣла, брошеннаго по извѣстному направленію съ данною скоростію.*

Поелику сіе движеніе можетъ быть изслѣдуемо въ двухъ разныхъ случаяхъ, или въ безвоздушномъ пространствѣ, или въ воздухѣ, противящемся движущемуся тѣлу, то рѣшеніе предложенной задачи можетъ быть двоякое. Въ первомъ случаѣ мы должны послѣдовать Теоріи Галилея, который, открывъ законъ свободнаго паденія тяжелыхъ тѣлъ, приложилъ оный къ метательному ихъ движенію; и по соединеніи движенія, сообщеннаго тѣлу, съ движеніемъ происходящимъ отъ дѣйствія тяжести онъ первый доказалъ, что тяжелое тѣло, брошенное въ безвоздушное пространство по какому либо направленію, кромѣ вертикальнаго, описываетъ параболу. Прежде сего, весьма полезнаго во многихъ отношеніяхъ открытія, хотя древніе Философы знали изъ наблюденій, что движеніе падающихъ тѣлъ, ускоряется по мѣрѣ ихъ

удаленія отъ начала паденія, но никто изъ нихъ не могъ показать той пропорціи, по коей возрастаетъ скорость сего движенія; также извѣстно имъ было, что тѣла верженныя въ воздушномъ пространствѣ, по какому ни есть невертикальному направленію, описываютъ кривую, но не зная законовъ свободнаго паденія тѣлъ, они не въ состояніи были опредѣлить видъ и свойство сей кривой. Первые Артиллеристы полагали, что путь, описываемый полетомъ ядра, состоитъ изъ трехъ частей; изъ коихъ первая, принадлежащая начальному сообщенному движенію, называемому *порывистымъ* составляетъ прямую линію; вторая, средняя, происходящая отъ сообщеннаго же движенія, но довольно измѣненнаго уже дѣйствіемъ тяжести, образуетъ кривую; а третія часть собственно принадлежащая, по ихъ мнѣнію, дѣйствію тяжести, преодолевавшему поступательное дѣйствіе ядра, составляетъ также, какъ и первая, прямую линію. Тарталія Италіянскій Математикъ первый, сколько извѣстно, началъ утверждать, что никакая часть линіи, описываемой движущимся ядромъ, не бываетъ прямая

и доказалъ, что самая большая горизонтальная дальность выстрѣла происходитъ, въ безвоздушномъ пространствѣ, при возвышеніи орудія въ 45 градусовъ.

Г Л А В А I.

О параболическомъ движеніи тѣлъ, бросаемыхъ изъ Артиллерійскихъ орудій.

Путь брошеннаго тѣла въ пустотѣ есть парабола. Выводъ общихъ формулъ параболическаго движенія.

§ 3. Сначала мы займемся изложеніемъ параболической Теоріи, изъ которой можно вывести нѣкоторыя полезныя заключенія, относительно выстрѣловъ изъ мортиръ, и которая основывается на томъ предположеніи, что воздухъ не представляетъ никакого сопротивленія движенію брошеннаго тѣла, а для сего вообразимъ себѣ безвоздушное пространство, и положимъ, что тяжелое тѣло будетъ брошено изъ точки A (фигура 1) по направленію AB со скоростію, которую означимъ чрезъ *u*. Если сіе направленіе не будетъ вертикальное, то

верженное тѣло, покорясь силѣ тяжести, безпрестанно влекущей его внизъ, останется на линіи AB, одно только мгновеніе; удаляясь же болѣе и болѣе отъ сей прямой, и перемѣняя въ каждое мгновеніе направленіе своего движенія, опишетъ сложнымъ движеніемъ нѣкоторую кривую линію AMC, которой видъ требуется опредѣлить.

Отнесемъ движущееся тѣло къ тремъ прямоугольнымъ осямъ координатъ AX, AY и AZ, проходящимъ чрезъ точку бросанія A, и пусть ось AY будетъ вертикальная; а прочіе двѣ AX и AZ горизонтальныя. Сіи оси составляютъ взаимное пресѣченіе горизонтальной плоскости XAZ съ двумя вертикальными XAY и ZAY; положеніе M движущагося тѣла, соотвѣтствующее времени, которое мы означимъ чрезъ t, находится посредствомъ разстояній онаго до трехъ сихъ плоскостей, или посредствомъ координатъ AP$=x$, PQ$=z$ и MQ$=y$. Назовемъ g дѣйствіе тяжести на поверхности земли, или ту скорость, которую свободно падающее тѣло пріобрѣтаетъ во время одной секунды. По причинѣ, что протяженіе кривыхъ, описываемыхъ брошенными снарядами, обыкновенно бываетъ

очень мало въ сравненіи съ окружностію земли, и при семъ снарядъ не восходитъ до той высоты, гдѣ усиліе тяжести примѣтно перемѣняется, то и можно принимать тяжесть g, на всемъ пространствѣ пробѣгаемаго тѣломъ пути, постоянною и дѣйствующею по прямымъ параллельнымъ между собою линіямъ. Теперь возмемъ въ разсмотрѣніе общія диффференціальныя уравненія $\frac{d^2x}{dt^2} = X$, $\frac{d^2y}{dt^2} = Y$ и $\frac{d^2z}{dt^2} = Z$, кои относятся къ опредѣленію всѣхъ обстоятельствъ свободнаго движенія тѣла, подверженнаго непрерывному дѣйствію силъ, данныхъ въ каждое мгновеніе по величинѣ и по направленію (Механика Франкера, чл. 163 и проч.). Поелику въ изслѣдываемомъ нами движеніи, дѣйствуетъ на тѣло одна лишь тяжесть g, которой направленіе вертикальное и параллельное оси y, и коей слагающія параллельныя осямъ x и z равны нулю, то замѣняя, въ общихъ уравненіяхъ движенія, силы X, Y и Z относительно параллельныя осямъ координатъ x, y и z, частными силами, будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=o,\ \frac{d^2z}{dt^2}=o,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-g;$$

здѣсь передъ количествомъ g знакъ *минусъ* поставленъ по той причинѣ, что тяжесть имѣетъ направленіе противоположное положительнымъ ординатамъ y, взятымъ вверхъ отъ горизонтальной плоскости XAZ.

Первые интегралы сихъ уравненій даютъ:

$$\frac{dx}{dt}=c,\ \frac{dz}{dt}=c'',\frac{dy}{dt}=c'-gt;$$

гдѣ c, c', c'' суть постоянныя величины, получаемыя чрезъ интеграцію. Раздѣливъ первое изъ послѣднихъ трехъ уравненій на второе, получимъ $c''dx=cdz$, потомъ взявъ интегралъ будемъ имѣть $c''x=cz$; здѣсь постоянная величина не прибавлена, поелику должно быть въ одно время $z=o$, $x=o$. Уравненіе первой степени $c''x=cz$, въ отношеніи къ кординатамъ x и z, показываетъ, что проекція кривой AMC на горизонтальной плоскости XAZ, есть прямая линія AC. Посему сія кривая вся заключается въ одной плоскости перпендикулярной къ плоскости XAZ, слѣдовательно въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ ось y и содержащей въ себѣ направленіе метанія AB.

§ 4. Если примемъ сію плоскость за плоскость координатъ x и y (фиг. 2), то въ отношеніи къ оной будемъ имѣть только два уравненія:

$$\frac{dx}{dt} = c, \frac{dy}{dt} = c' - gt \ldots (1),$$

коихъ интегралы суть

$$x = ct, \; y = c't - \tfrac{1}{2} gt^2 \ldots (2);$$

здѣсь постоянныя величины не прибавлены, потому что когда $t = o$, то $x = o$ и $y = o$. Для опредѣленія постоянныхъ величинъ c и c', надлежитъ прибѣгнуть къ условіямъ начальнаго движенія. Но дифференціальное отношеніе $\frac{dx}{dt}$ выражаетъ въ каждое мгновеніе скорость движущагося тѣла по направленію оси x разложенную; дифференціальное отношеніе $\frac{dy}{dt}$ выражаетъ также скорость тѣла по направленію оси y разложенную (Мех. Франкера чл. 166); и такъ, если тѣлу сообщена будетъ начальная скорость $= u$ въ направленіи вертикальномъ, тогда для $t = o$ будетъ $\frac{dx}{dt} = o$ и $\frac{dy}{dt} = u$; въ слѣдъ за симъ изъ уравненій (1) найдутся $c = o$, $c' = u$, и уравненія (1) и (2) примутъ видъ:

$$\frac{dy}{dt} = u - gt,\ y = ut - \tfrac{1}{2}gt^2;$$

помощію коихъ можно вывесть различныя обстоятельства движенія тѣла, брошеннаго съ низу вверхъ и обратно. Не входя въ подробное разсматриваніе сего движенія, которое изложено въ основаніяхъ Механики, мы займемся изслѣдованіемъ движенія въ общемъ случаѣ, когда тѣло брошено будетъ по направленію AB, составляющему съ осью x или съ горизонтомъ уголъ $= \theta$. Въ практическихъ дѣйствіяхъ величина сего угла, опредѣляется наклоненіемъ оси канала орудія къ горизонту, допуская при семъ, что снарядъ вылетаетъ изъ жерла по направленію самой оси. Въ общемъ семъ случаѣ слагающія скорости, произшедшія отъ разложенія начальной скорости u бросанія, будутъ $u\cos\theta$ по направленію горизонтальной оси x, и $u\sin\theta$ по направленію вертикальной оси y; а поелику первая изъ оныхъ опредѣляетъ величину $\frac{dx}{dt}$, вторая величину $\frac{dy}{dt}$ когда $t = o$, то по причинѣ уравненій (1) будемъ имѣть $c = u\cos\theta$ и $c' = u\sin\theta$: по сему уравненія (1) и (2) обратятся въ слѣдующія:

$$\frac{dx}{dt} = u\cos\theta,\quad \frac{dy}{dt} = u\sin\theta - gt \ldots\ldots(a)$$

$$x = u\cos\theta.\ t,\quad y = u\sin\theta.\ t - \tfrac{1}{2}gt^2 \ldots\ldots(b)$$

изъ послѣднихъ двухъ уравненій первое относится къ равномѣрному движенію, второе же къ равно-перемѣнному движенію; изъ сего заключаемъ, что брошенное тѣло совершаетъ равномѣрное движеніе въ направленіи горизонтальномъ, а равно-перемѣнное въ направленіи вертикальномъ.

Исключивъ время t между уравненіями (b), получимъ уравненіе кривой линіи или пути брошеннымъ тѣломъ пробѣгаемаго (траекторіи), которое будетъ:

$$y = x\,tg\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} \ldots\ldots(c)$$

можно сократить сіе уравненіе, поставивъ вмѣсто u^2 равную величину $2gh$, и означивъ чрезъ $h = \frac{u^2}{2g}$ ту высоту, съ которой тѣло должно упасть въ безвоздушномъ мѣстѣ, дабы пріобрѣсть въ концѣ паденія скорость $= u$; и получимъ:

$$y = x\,tg\theta - \frac{x^2}{4h\cos^2\theta} \ldots\ldots(d)$$

§ 5. Уравненіе (c) или (d), изображаетъ свой-

ство параболы; въ самомъ дѣлѣ отнесемъ кривую къ системѣ косоугольныхъ координатъ z и w, считая ихъ отъ точки бросанія A по продолженію вертикальной линіи Ay, протянутой въ низъ и по направленію линіи сообщеннаго движенія AE. Для какой ни есть точки M сей кривой новые координаты будутъ AQ$=z$ и MQ$=w$; и продолживъ линію MP до пресѣченія съ AB, получимъ изъ треугольника APB:

AP$=$AB $cos <$BAP или $x=w\ cos\,\theta$,

MP$=$BP—BM или $y=w\ sin\,\theta-z$.

Теперь поставивъ величины, найденныя для x и y въ уравненіе (d), оно по надлежащемъ сокращеніи перемѣнится въ слѣдующее:

$$w^2=4hz,$$

которое показываетъ, что отношеніе между новыми координатами для каждой точки кривой линіи полета выражается уравненіемъ параболы, отнесенной къ сопряженнымъ ея діаметрамъ. Но извѣстно, что одинъ изъ сопряженныхъ діаметровъ, параллельный оси параболы, а другой касательной къ ней, то изъ сего заключаемъ, что парабола, по коей брошенное тѣло совершаетъ свой полетъ, имѣетъ ось вертикальную, и что направленіе бросанія AB

составляетъ касательную къ сей кривой (*).

(*) Сіе послѣднее уравненіе въ отношеніи косоугольныхъ координатъ и прежнія [a], [b] и [c] въ отношеніи прямоугольныхъ координатъ могутъ быть выведены, не прибѣгая къ интеграціи общихъ уравненій криволинейнаго движенія тѣла, непосредственно слѣдующимъ образомъ.

Пусть тѣло брошено будетъ изъ A [фиг. 3] по направленію AC со скоростію равною *u*: сперва докажемъ, что путь, имъ описываемый, заключается въ одной вертикальной плоскости, проходящей чрезъ направленіе метанія. Для сего положимъ, что линія AB, взятая на семъ направленіи, означаетъ то пространство, которое бы прошло тѣло въ первое мгновеніе, повинуясь одной только силѣ бросанія; а вертикальная линія AP представляетъ ту высоту, на которую тяжесть склонила бы сіе тѣло къ низу въ то же мгновеніе. Построивъ параллелограммъ на линіяхъ AB и AP, брошенное тѣло получитъ движеніе, по діогонали сего параллелограмма, и въ концѣ перваго мгновенія придетъ въ точку I. Въ слѣдующее мгновеніе, сіе тѣло, если бы на него не дѣйствовала тяжесть, прошло бы по продолженію діогонали AI пространство ID=AI; но сложнымъ движеніемъ, производимымъ поступательною силою и вертикальнымъ дѣйствіемъ тяжести, оно опишетъ діогональ IO новаго параллелограмма, построеннаго на линіяхъ ID и IQ пропорціональныхъ симъ силамъ, и въ концѣ втораго мгновенія придетъ въ O. Подобное сему происходитъ съ движущимся тѣломъ, и въ слѣдующія за тѣмъ безконечно малыя промежутки времени. А какъ рядъ всѣхъ діогоналей, кои очевидно безконечно суть малы, составляетъ кривую; при семъ, каждый параллелограммъ имѣетъ двѣ смѣжныя

§ 6. Уравненія (a), (b) и (c) заключаютъ въ себѣ все, что только при метательномъ движеніи знать потребно, а именно: 1) начальную

сторопы, содержащіяся въ вертикальной плоскости, которая принадлежитъ предшествующему параллелограмму; то изъ сего заключаемъ, что кривая линія полета вся заключается въ одной вертикальной плоскости, проходящей чрезъ направленіе метанія. Чтобы опредѣлить уравненіе сей кривой, означимъ чрезъ θ уголъ бросанія BAC [фиг. 2], то есть, тотъ уголъ, который первоначальное направленіе движенія составляетъ съ горизонтомъ; и разложимъ начальную скорость u на двѣ другія, на одну горизонтальную, которая будетъ$=u\cos\theta$, и на другую вертикальную, которая будетъ$=u\sin\theta$. Горизонтальная скорость движущагося тѣла не терпитъ никакого измѣненія отъ тяжести, направленной съ верху въ низъ, и потому остается у него непремѣнною вовсе время движенія; вертикальная же скорость, будучи прямо противоположна дѣйствію тяжести, которое означимъ чрезъ g, умепьшается во время t количествомъ $=gt$, равнымъ той скорости, которая сообщается свободно падающему тѣлу въ сіе время [Мех. Франкера чл. 156]. Слѣдовательно по истеченіи времени t, вертикальная скорость движущагося тѣла, приводится къ $u\sin\theta-gt$, между тѣмъ какъ горизонтальная скорость постоянно равна $u\cos\theta$. Сіи два выраженія заключаются въ вышенайденныхъ уравненіяхъ [a]. Впрочемъ брошенное тѣло, не бывъ подверженнымъ дѣйствію тяжести, двигалось бы по данному ему направленію AB, описывая въ равныя времена равныя пространства; и прошло бы въ извѣстное время t пространство $AB=ut$. Но въ сіе время тяжесть, отвлекая его безпре-

скорость u бросанія снарядовъ, по косй опредѣляется сила и величина пороховаго заряда; 2) уголъ θ, на сколько должно возвысить ору-

---

станно отъ сего направленія, заставляетъ оное равно-ускоренным движеніемъ приблизиться къ поверхности земли на разстояніе $BM=\frac{1}{2}gt^2$, равное пространству описываемому свободно падающимъ тѣломъ во время t [Мех. Франкера чл. 156]; по сему, проведши прямую MQ параллельную AB, и изобразивъ AQ чрезъ z и MQ чрезъ w, будемъ имѣть два уравненія $w=ut$, $z=\frac{1}{2}gt^2$, между коими исключивъ время t, получимъ уравненіе, между косоугольными координатами z и w кривой линіи полета, слѣдующаго вида:

$$w^2=\frac{2u^2z}{g}, \text{ или } w^2=4hz,$$

когда, для краткости, сдѣлаемъ $u^2=2gh$, и чрезъ $h=\frac{u^2}{2g}$ означимъ высоту, соотвѣтствующую скорости u. И такъ сія кривая имѣетъ такое свойство, что квадраты ея ординатъ пропорціональны соотвѣтствующимъ абсциссамъ; слѣдовательно она есть парабола.

Что касается до уравненій [b], опредѣляющихъ въ извѣстное мгновеніе положеніе движущагося тѣла, въ отношеніи горизонтальной линіи AC и вертикальной линіи AD, онѣ найдутся изъ прямоугольнаго треугольника APB и найденныхъ предъ симъ выраженій $AB=ut$, $BM=\frac{1}{2}gt^2$; и будетъ:

$$AP=AB\cos\theta, \text{ или } x=u\cos\theta.t$$
$$PM=PB-MB, \text{ или } y=u\sin\theta.t-\tfrac{1}{2}gt^2,$$

то есть, брошенное тѣло совершаетъ движеніе, равномѣрное въ направленіи горизонтальномъ, а равно-перемѣнное въ направленіи вертикальномъ.

діе; 3) время t, употребляемое снарядомъ на прохожденіе своего пути; и 4) горизонтальное и вертикальное разстоянія x и y отъ точки метанія А, опредѣляющіе положеніе того предмета, въ который хотятъ попасть.

О горизонтальной дальности полета снарядовъ.

§ 7. Для точекъ, въ которыхъ кривая линія полета встрѣчаетъ горизонтъ, опредѣляемый точкою метанія А, должно быть $y=o$; по поставленіи сей величины въ уравненіе (c), получимъ $x\,tg\theta-\frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta}=o$; отсюда будемъ имѣть двѣ величины $x=o$, и $x=\frac{2u^2}{g}\sin\theta.\cos\theta.$ или

$$x=\frac{u^2}{g}\sin 2\theta=c.....(e)$$

Изъ коихъ первая показываетъ точку метанія А, а вторая опредѣляетъ горизонтальное разстояніе $AC=c$ перваго паденія ядра отъ ору-

---

Наконецъ исключивъ, между послѣдними двумя уравненіями, время t получимъ уравненіе [c]

$$y=x\,tg\theta-\frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta},$$

или, по поставленіи $u^2=2gh$, уравненіе [d]

$$y=x\,tg\theta-\frac{x^2}{4h\cos^2\theta}$$

дія: разстояніе сіе называютъ *распространеніемъ* параболы или *горизонтальною дальностію* выстрѣла. Для построенія онаго, должно взять отъ A, по вертикальной линіи Ay, часть $AD = \frac{2u^2}{g} = 4h$ (§ 4), потомъ опустить изъ точки D на направленіе метанія AB перпендикуляръ DE, и изъ точки E на AC перпендикуляръ EC; тогда будетъ $AC = AE\ cos\theta = AD\ sin\theta.\ cos\theta = \frac{2u^2}{g} sin\theta.\ cos\theta$.

§ 8. Уравненіе $c = \frac{u^2}{g} sin\ 2\theta$ показываетъ, что величина c или горизонтальная дальность бросанія увеличивается, по мѣрѣ какъ величины u и $sin\ 2\theta$ увеличиваются. Первая изъ сихъ величинъ изображаетъ начальную скорость, зависящую отъ величины заряда, и естественно, что при сильнѣйшемъ зарядѣ дальность полета должна увеличиваться; вторая же показываетъ, что при одинакомъ зарядѣ сія дальность будетъ тѣмъ больше, чѣмъ $sin\ 2\theta$ больше. Но какъ самый большій синусъ равенъ $sin\ 90°$, то есть: когда $2\theta = 90$ градусамъ или $\theta = 45$ градусамъ, то сіе доказываетъ, что при одинаковомъ зарядѣ, по Теоріи параболической, самый даль-

ній выстрѣлъ происходитъ при возвышеніи орудія на 45 градусовъ. Въ семъ случаѣ мы имѣемъ $sin\ 2\theta = 1$, и $c = \frac{u^2}{g} = 2h$, то есть: самый дальній выстрѣлъ вдвое больше той высоты, которая соотвѣтствуетъ начальной скорости брошеннаго тѣла. Впрочемъ дальность каждаго выстрѣла, произведеннаго не подъ 45 градусами, равна дальности выстрѣла, произведеннаго подъ 45 градусами, помноженной на синусъ двойнаго угла бросанія.

Пробныя мортирки, употребляемыя для узнанія доброты пороха, ставятся обыкновенно подъ угломъ возвышенія въ 45 градусовъ и это не безъ причины, ибо ошибки, какія только въ мѣрѣ угловыхъ возвышеній могутъ вкрасться около сего числа градусовъ, производятъ малѣйшую перемѣну въ дальности выстрѣла. Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіе $c = \frac{u^2}{g} sin\ 2\theta$ допустимъ, что сдѣлана въ величинѣ θ ошибка на весьма малое количество $d\theta$, и захотимъ послѣ сего узнать, какая выдетъ ошибка въ дальности выстрѣла c, то стоитъ только взять дифференціалъ сего уравненія,

принявъ θ и c перемѣнными, и мы получимъ:

$$dc = \frac{2u^2}{g} \cos 2\theta .\ d\theta ;$$

изъ сего видно, что погрѣшность dc получается тѣмъ меньшею, чѣмъ уголъ возвышенія θ ближе подходитъ къ 45 градусамъ или уголъ 2θ къ 90 градусамъ. Слѣдовательно самыя малыя ошибки выходятъ при 45 градусахъ.

§ 9. Относительно времени, которое употребляетъ снарядъ на совершеніе всего полета, опредѣляемаго горизонтальною дальностію паденія, получимъ изъ уравненій (b), полагая въ нихъ $x = c, y = o$ и сокращая послѣднее на t, слѣдующія.

$$c = u\cos\theta .\ t,\ u\sin\theta = \tfrac{1}{2}\ gt \ldots\ldots (f),$$

изъ коихъ, по исключеніи начальной скорости u, будемъ имѣть ещѣ:

$$ctg\theta = \tfrac{1}{2}\ gt^2 \ldots\ldots\ldots (g).$$

§ 10. Предъидущія формулы § 7-го и 9-го, хотя собственно относятся къ движенію тѣлъ въ безвоздушномъ пространствѣ, но онѣ выгодно могутъ быть употреблены въ дѣло и при медленномъ движеніи тѣлъ въ воздухѣ, не опасаясь большой отъ того погрѣшности; потому что тогда, какъ то послѣ узнаемъ, сопротивленіе воздуха, которое зависитъ отъ величины

вѣса и скорости движущагося тѣла, слабое лишь вліяніе имѣетъ на измѣненіе полета медленно движущагося тѣла, и слѣдовательно истинный его полетъ близко будетъ подходить къ тому, каковой по вычисленію, на Теоріи параболической основанному, быть долженъ. Симъ образомъ для практическаго бросанія снарядовъ, особливо бомбъ, коихъ вѣсъ значителенъ и движеніе произведено небольшимъ зарядомъ, сообщающимъ бомбѣ начальную скорость въ 200, 300 и 400 футовъ въ одну секунду, смотря по меньшему или большему калибру оной, можно вывесть изъ выше предложенныхъ основаній приблизительно слѣдующія правила.

1) При одинаковомъ зарядѣ, самый дальній выстрѣлъ происходитъ подъ угломъ возвышенія орудія на 45 градусовъ (§ 8).

2) При одинакомъ зарядѣ можно бросить бомбу на одно и то же разстояніе подъ двумя разными углами возвышенія. Ибо для дальности бросанія c и начальной скорости u, имѣемъ $c = \frac{u^2}{g} \sin 2\theta$ (§ 7), но $\sin 2\theta = \sin (180 - 2\theta)$, и такъ два угла возвышенія, подъ которыми

дальность паденія остается та же, будутъ θ и $90^\circ - \theta$; вмѣстѣ они составляютъ прямой уголъ или 90 градусовъ; разность между каждымъ изъ нихъ и среднимъ угломъ возвышенія равнымъ 45° есть та же и равна $45^\circ - \theta$; таковые суть углы 20° и 70°, 43° и 47° и проч.

3) При одинаковомъ зарядѣ, но при различныхъ углахъ возвышенія, горизонтальныя дальности полетовъ относятся, какъ синусы удвоенныхъ угловъ возвышенія. Ибо для двухъ разныхъ угловъ θ и θ', означивъ соотвѣтствующія ихъ дальности чрезъ c и c', будемъ имѣть по § 7, слѣдующую пропорцію $c : c' = \frac{u^2}{g} \sin 2\theta : \frac{u^2}{g} \sin 2\theta'$, или $c : c' = \sin 2\theta : \sin 2\theta'$. И такъ дальность выстрѣла подъ угломъ 15° или 75° въ половину меньше самаго дальняго выстрѣла соотвѣтствующаго 45°, потому, что сіи дальности относятся между собою, какъ $\sin 30^\circ : \sin 90^\circ$, то есть, какъ 1 : 2; слѣдовательно дальность выстрѣла подъ угломъ въ 15° или 75° равна $\frac{u^2}{2g} = h$ (§ 8), то есть. равна высотѣ, принадлежащей начальной скорости брошеннаго тѣла.

4) При постоянномъ углѣ возвышенія, но

при различной величинѣ зарядовъ, дальности полетовъ пропорціональны квадратамъ начальныхъ скоростей, а начальныя скорости пропорціональны корнямъ квадратнымъ изъ дальностей; что явствуетъ изъ уравненія (e) § 7.

Чтобы опредѣлить начальную скорость, соотвѣтствующую извѣстному заряду, дѣлаютъ напередъ одинъ или нѣсколько пробныхъ выстрѣловъ подъ небольшимъ угломъ возвышенія, дабы брошенное тѣло, сколько можно менѣе времени подвержено было сопротивленію воздуха, потомъ взявъ изъ нихъ среднюю дальность полета, вставливаютъ оную вмѣсто c въ уравненія $c = \frac{u^2}{g} \sin 2\theta$; тогда по извѣстнымъ величинамъ c и θ, опредѣляютъ величину u или начальную скорость $= \sqrt{\frac{cg}{\sin 2\theta}}$. Зная величину u, можно съ помощію уравненія $c = \frac{u^2}{g} \cdot \sin 2\theta$, при одинаковомъ зарядѣ для всѣхъ желаемыхъ разстояній опредѣлить углы возвышенія орудія, или отыскать то разстояніе, на которое выстрѣленное изъ орудія тѣло, полетитъ при направленіи орудія подъ произвольнымъ угломъ возвышенія. Разысканія, къ по-

слѣднимъ двумъ случаямъ относящіяся, еще могутъ быть произведены по тройному правилу, основываясь на вышеприведенномъ выводѣ, что дальности полетовъ одинакимъ зарядомъ произведенныя, находятся въ отношеніи синусовъ, удвоенныхъ угловъ возвышенія. По сему-то основанію составлены Белидоромъ для практическаго употребленія таблицы, кои помѣщены въ его книгѣ подъ заглавіемъ *Le bombardier français* и показываютъ, на какой уголъ должно возвысить мортиру, чтобы брошенная бомба съ извѣстною силою, полетѣла на желаемое разстояніе; и обратно, на какое разстояніе падаетъ бомба, будучи брошена изъ мортиры подъ извѣстнымъ возвышеніемъ и съ извѣстною силою. Впрочемъ можно обойтись безъ сихъ таблицъ, замѣняя ихъ обыкновенными тригонометрическими таблицами синусовъ; съ другой стороны онѣ имѣютъ тотъ важный недостатокъ, что могутъ служить въ практическомъ употребленіи только при выстрѣлахъ малымъ зарядомъ производимыхъ, потому что правило, по которому составлены сіи таблицы, предполагаетъ движеніе въ безвоздушномъ пространствѣ.

5) Поелику время горѣнія бомбовыхъ трубокъ, предполагая ихъ равно-качественными, пропорціонально длинѣ оныхъ, то соотвѣтственно тому времени, какъ долго бомба остается на пути, ею пробѣгаемомъ, располагаютъ и длину каждой трубки. Но изъ найденныхъ уравненій въ § 9 слѣдуетъ:

α) Что при различныхъ зарядахъ или начальныхъ скоростяхъ, но равныхъ углахъ возвышенія, длины трубокъ, или пропорціональныя имъ времена полета бомбъ, относятся какъ корни квадратные изъ дальностей (g);

β) Что при одинакихъ дальностяхъ, но при разныхъ зарядахъ, длины трубокъ или времена полета бомбъ относятся, какъ корни квадратные изъ тангенсовъ угловъ возвышенія (g);

γ) И что, наконецъ, при одинакихъ зарядахъ длины трубокъ или времена полета бомбъ относятся, какъ синусы угловъ возвышенія (f)...

О наибольшей высотѣ полета снарядовъ.

§ 11. Поелику ось параболы, описываемой тѣломъ, вертикальная, то явствуетъ, что вершина сей кривой есть самая возвышенная надъ горизонтомъ точка, соотвѣтствующая срединѣ горизонтальной дальности AC или хорды

перпендикулярной къ оси. Но сіл дальность $= \frac{u^2}{g} \cdot sin 2\theta$, и такъ поставивъ половину оной равную $\frac{u^2}{2g} sin\ 2\theta = \frac{u^2}{g} sin\theta\ cos\theta$, вмѣсто количества x, въ общее уравненіе (§ 4).

$$y = x tg\theta - \frac{gx^2}{2u^2\ cos^2\theta}$$

будемъ имѣть по надлежащемъ сокращеніи.

$$y \text{ или } DE = \frac{u^2}{2g} sin^2\theta \ldots\ldots (h),$$

что опредѣляетъ самую большую высоту DE (фиг. 4), на которую можетъ подняться въ своемъ полетѣ брошенное тѣло. Изъ сего видно, что самыя большія высоты полетовъ, при одинакихъ зарядахъ, пропорціональны квадратамъ синусовъ угловъ возвышеній; а при одинаковомъ возвышеніи, пропорціональны квадратамъ начальныхъ скоростей.

Когда уголъ бросанія предположится въ 45 градусовъ, тогда будетъ $sin^2\theta = \frac{1}{2}$, и слѣдовательно $DE = \frac{u^2}{4g} = \frac{1}{4}$ AT § 8); сіе показываетъ, что въ такомъ случаѣ наибольшая высота равна $\frac{1}{4}$ горизонтальной дальности.

Слѣдуя правилу, предложенному въ основаніяхъ дифференціальнаго исчисленія, касательно

наибольшихъ и *наименьшихъ* величинъ, наибольшая высота DE найдется также, взявъ дифференціалъ ординаты y зависимо отъ x въ общемъ уравненіи (c), и уравнивъ оный нулю; ибо сія ордината должна быть искомою наибольшею. Симъ образомъ будемъ имѣть:

$$dy = dx.\ tg\theta - \frac{2g\,x\,dx}{2u^2\,cos^2\theta} = o,$$

отсюда $x = \frac{u^2}{g} sin\theta.\ cos\theta =$ AE; и по введеніи послѣдней сей величины въ общее уравненіе, получимъ $y = \frac{u^2}{2g} sin^2\theta =$ DE, тоже что и выше.

§ 12. Имѣя координаты AE и DE вершины D параболы, мы получимъ уравненіе ея въ отношеніи къ сей вершинѣ и оси, поставивъ въ общемъ уравненіи $y = x\ tg\theta - \frac{gx^2}{2u^2\,cos^2\theta}$, въ коемъ координаты x, y относятся къ какой нибудь точкѣ m кривой; величины:

$$x = \text{AP} = \text{AE} - \text{PE} = \text{AE} - \text{MQ} = \frac{2u^2}{g} sin\theta\ \ cos\theta - y',$$

$$y = \text{MP} = \text{DE} - \text{DQ} = \frac{u^2}{2g} sin^2\theta - x',$$

въ которыхъ x' и y' суть новые координаты точки же m, въ отношеніи къ вершинѣ D и оси

DE ; и чрезъ то оно приметъ, по сокращеніи, слѣдующій видъ :

$$y' = \frac{2u^2}{g} \cos^2\theta .\ x';$$

таково есть искомое уравненіе параболы, коей параметръ равенъ $\frac{2u^2}{g} \cos^2\theta$...

Объ углѣ возвышенія орудія.

§ 13. Пусть будетъ предметъ B, въ которой должно попасть бомбою, брошенною изъ точки A (фиг. 5, 6 и 7), съ извѣстною начальною скоростію, соотвѣтствующею данному заряду; горизонтальное разстояніе AE и вертикальное разстояніе BE, по коимъ опредѣляется положеніе предмета отъ точки метанія A, суть даны или могутъ быть найдены по извѣстнымъ тригонометрическимъ правиламъ : назвавъ первое чрезъ a, а второе чрезъ b, и поставивъ сіи величины въ уравненіе (d) § 4. на мѣсто общихъ координатъ x и y, будемъ имѣть слѣдующее :

$$b = a tg\theta - \frac{a^2}{4h \cos^2\theta},$$

изъ котораго требуется опредѣлить уголъ бросанія θ. Для сего сдѣлавъ $tg\theta = z$, и замѣтивъ

что $cos^2\theta = \frac{1}{1+tg^2\theta} = \frac{1}{1+z^2}$, будемъ имѣть, по поставленіи сихъ величинъ и по уничтоженіи знаменателя, уравненіе:

$$a^2z^2 - 4ahz = a^2 - 4bh \ldots\ldots (i),$$

которое есть второй степени и даетъ

$$z \text{ или } tg\theta = \frac{2h}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{4h^2 - a^2 - 4bh} \ldots (k).$$

Предметъ B, по которому стрѣляютъ, можетъ имѣть три различныя положенія въ отношеніи точки метанія A; можетъ оный находиться или выше горизонта опредѣляемаго сею точкою, какъ показываетъ фигура 5, или ниже, какъ на фиг. 6; или на самомъ семъ горизонтѣ, какъ на фиг. 7. Мы приложимъ послѣднее уравненіе къ каждому изъ сихъ трехъ случаевъ.

α) Первое положеніе предмета, когда оный находится выше горизонта дула орудія фиг. 5.

Въ семъ случаѣ тѣло, коимъ намѣреваются попасть въ данный предметъ, можетъ быть пущено по двумъ разнымъ направленіямъ; одно изъ нихъ составляетъ съ горизонтомъ AE уголъ CAE, котораго тангенсъ $= \frac{2h}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{4h^2 - 4bh - a^2}$, а другое уголъ C'AE, котораго

тангенсъ $= \frac{2h}{a} - \frac{1}{a}\sqrt{4h^2 - 4bh - a^2}$. При семъ, дабы вопросъ былъ возможенъ, необходимо должно быть подъ корнемъ количество $4h^2 - 4bh$ больше или по крайней мѣрѣ $= a^2$. Ибо если будетъ $4h^2 - 4bh < a^2$ или $2h < b + \sqrt{b^2 + a^2}$, то есть наибольшая горизонтальная дальность, соотвѣтствующая данному заряду (§ 8), меньше суммы разстояній BE и AB предмета отъ горизонта и отъ орудія, тогда $tg\theta$ сдѣлается количествомъ не возможнымъ; а слѣдовательно ни подъ какимъ угломъ возвышенія нельзя будетъ доброситъ снарядъ до желаемаго предмета. Если будетъ $4h^2 - 4bh = a^2$ или $2h = b + \sqrt{b^2 + a^2}$, тогда $\sqrt{4h^2 - 4bh - a^2}$ уничтожится, и получится для $tg\theta$ одна только величина $= \frac{2h}{a}$, показывающая, что въ такомъ случаѣ можно попасть въ предметъ, стрѣляя не болѣе какъ подъ однимъ угломъ возвышенія, опредѣляемымъ изъ уравненія $tg\theta = \frac{2h}{a} = \frac{b + \sqrt{b^2 + a^2}}{a}$.

Примѣръ 1. Положимъ, что тѣломъ, брошеннымъ со скоростію $= 360$ футамъ, требуется попасть въ предметъ B, который находится

отъ горизонта орудія на высотѣ BE=120 фут. и удаленъ отъ него въ направленіи горизонтальномъ на разстояніе AE=1800 фут.

Въ семъ предположеніи будемъ имѣть $a=1800$, $b=120$, $h=\frac{u^2}{2g}=\frac{(360)^2}{2.32}=2025$. Поставивъ сіи величины въ уравненіе $tg\theta=\frac{2h}{a}\pm\frac{1}{a}\sqrt{4h(h-b)-a^2}$, получимъ:

$tg\theta=4{,}18971$ и $tg\theta'=0{,}31029$;

и взявъ логарифмы сихъ послѣднихъ количествъ, кои будутъ:

$log\ tg\theta=0{,}6221859$, и $log\ tg\theta'=9{,}4917678-10$, по таблицамъ тригонометрическимъ не трудно будетъ отыскать два угла, соотвѣтствующіе симъ логарифмамъ; одинъ изъ нихъ будетъ $=76^\circ\ 34\frac{1}{2}'$, а другой $=17^\circ\ 14\frac{1}{2}'$. Подъ каждымъ изъ сихъ угловъ можно попасть въ предметъ.

Примѣръ 2. Если со скоростію=320 фут. въ одну секунду, надобно будетъ стрѣлять по предмету удаленному отъ орудія на 2880 фут. и находящемуся на высотѣ 304 фут., то найдется $4h^2-4bh-a^2=o$, $tg\theta=\frac{2h}{a}=1{,}11111$, а изъ

сего уголъ $\theta = 48^\circ 1'$, подъ которымъ должно быть брошено тѣло, дабы достигло даннаго предмета....

Примѣръ 3. Если при той же скорости=320 фут, и при томъ же горизонтальномъ разстояніи=2880 фут. предметъ будетъ возвышеннѣе показаннаго числа=304 фут., тогда количество $4h^2 - 4bh - a^2$ сдѣлается отрицательнымъ и корень изъ него невозможнымъ; слѣдовательно, при такомъ положеніи предмета въ разсужденіи орудія, нельзя будетъ попасть въ оный, не увеличивъ пороховаго заряда.

β) Второе положеніе предмета, когда оный будетъ ниже горизонта орудія фиг. 6.

Чтобы приложить уравненіе (k) ко второму случаю, стоитъ только въ ономъ перемѣнить знакъ количества b, потому что перпендикуляры, идущіе отъ предмета до горизонта, обращены въ семъ случаѣ въ противную сторону, и будетъ:

$$tg\theta = \frac{2h}{a} - \frac{1}{a}\sqrt{4h^2 + 4bh - a^2};$$

отсюда видно, что одинакіе выстрѣлы, по данному предмету, могутъ быть производимы подъ двумя разными углами возвышенія, изъ коихъ

одинъ имѣетъ своимъ тангенсомъ величину $\frac{2h}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{4h^2+4bh-a^2}$, а другой величину $\frac{2h}{a}-\frac{1}{a}\sqrt{4h^2+4bh-a^2}$. При семъ замѣтить должно, что дабы выстрѣлъ даннымъ зарядомъ дѣйствительно могъ быть произведенъ, надлежитъ, чтобъ количество $4h^2+4bh$ было больше или по крайней мѣрѣ $=a^2$, а слѣдовательно, чтобы было $2h$ было $>$ или $=\sqrt{b^2+a^2}-b$, то есть, наибольшая горизонтальная дальность, соотвѣтствующая данному заряду, больше или равна разности между разстояніями AB и BE предмета отъ горизонта и отъ орудія. Впрочемъ въ предположеніи $4h^2+4bh=a^2$ или $2h=\sqrt{b^2+a^2}-b$, можно попасть въ предметъ не болѣе какъ только подъ однимъ угломъ, коего тангенсъ $=\frac{2h}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{a}$.

Въ случаѣ $4bh>a^2$, количество $\sqrt{4h^2+4bh-a^2}$ больше будетъ $2h$, и слѣдовательно величина тангенса $=\frac{2h}{a}-\frac{1}{a}\sqrt{4h^2+4bh-a^2}$ сдѣлается отрицательною; а сіе ведетъ къ заключенію, что тогда одинъ изъ выстрѣловъ долженъ быть направленъ подъ горизонтъ AE...

Напослѣдокъ, въ случаѣ $4bk = a^2$ или $2k = \frac{a^2}{2b}$, одинъ изъ выстрѣловъ сдѣлается горизонтальнымъ; ибо тогда получаемъ $tg\theta = \frac{2k}{a} + \frac{2k}{a}$, или $tg\theta = \frac{4k}{a} = \frac{a}{b}$ и $tg\theta' = o$; послѣднее уравненіе предполагаетъ уголъ $\theta' = o$, что и подтверждаетъ сказанное нами.

γ) *Третіе положеніе предмета, когда оный находится на одномъ съ орудіемъ горизонтѣ фиг* 7.

Когда предметъ B разсматривается на горизонтѣ, проходящемъ чрезъ точку метанія A, тогда вертикальное онаго разстояніе $BE = b = o$, и уравненіе (k) перемѣняется въ слѣдующее:

$$tg\theta = \frac{2k}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{4k^2 - a^2};$$

которое показываетъ, что для возможныхъ выстрѣловъ должно быть $2k >$ или $= a$, и что въ томъ случаѣ, когда $2k = a$, выстрѣлъ можетъ быть произведенъ только подъ однимъ угломъ, коего тангенсъ, равный $\frac{2k}{a} = 1$, показываетъ, что сей уголъ $= 45$ градусамъ (§ 8).

Примѣчательное свойство относительно сумм-

мы двухъ угловъ бросанія, принадлежащихъ одинакому заряду.

§ 14. Сумма двухъ угловъ бросанія CAE$=\theta$ и C′ AE$=\theta'$ (фиг. 5, 6 и 7), принадлежащихъ одинакому заряду, имѣетъ примѣчательное свойство, которое просто выводится изъ выраженій оныя опредѣляющихъ $tg\theta=\frac{2h+\sqrt{4h^2-4bh-a^2}}{a}$ и $tg\theta=\frac{2h-\sqrt{4h^2-4bh-a^2}}{a}$. Въ самомъ дѣлѣ, будемъ имѣть очевидно:

$$tg\,(\theta+\theta')=\frac{tg\,\theta+tg\theta'}{1-tg\theta.\,tg\theta'}=-\frac{a}{b};$$

сія величина $tg\ (\theta+\theta')$, въ томъ случаѣ, когда предметъ находится выше горизонта или когда количество b положительно, есть отрицательная. А какъ отрицательному тангенсу соотвѣтствуетъ тупой уголъ, или уголъ больше 90 градусовъ, и такъ сдѣлавъ $\theta+\theta'=90^\circ+\alpha$, гдѣ прибавокъ α требуется еще опредѣлить, потомъ взявъ тангенсъ обѣихъ частей сего равенства, получимъ:

$$tg\,(\theta+\theta')=tg\,(90^\circ+\alpha)=-cotg\alpha=-\frac{a}{b},\text{ и }tg\alpha=\frac{b}{a};$$

Изъ сего видно, что α есть уголъ BAE, составляемый горизонтальною линіею и прямою, проведенною отъ предмета къ дулу орудія. Та

же величина $tg\ (\theta+\theta')$ въ томъ случаѣ, когда предметъ находится ниже горизонта, или когда количество b отрицательно, есть положительная; по сему сдѣлавъ $\theta+\theta'=90°-\alpha$, найдемъ подобно предъидущему, что α есть также уголъ BAE, составляемый горизонтальною линіею и прямою, проведенною отъ предмета къ дулу орудія. Наконецъ въ томъ случаѣ, когда предметъ находится на горизонтѣ, или когда $b=o$, величина $tg\ (\theta+\theta')=$безконечному числу, и $\theta+\theta'=90°$, такъ что одинъ изъ двухъ угловъ возвышенія, служитъ другому дополненіемъ къ 90°. Сличивъ между собою результаты сихъ трехъ случаевъ, заключаемъ, что сумма двухъ угловъ возвышенія, соотвѣтствующихъ тому же заряду, употребляемому для обстрѣливанія предмета, даннаго положеніемъ, равняется прямому углу, *плюсъ* или *минусъ* углу составляемому горизонтальною линіею и прямою, проведенною отъ предмета къ орудію, смотря по тому, будетъ ли предметъ находиться выше или ниже горизонта орудія. А когда предметъ будетъ на одномъ съ орудіемъ горизонтѣ, оба угла возвышеній, составляютъ вмѣстѣ прямой уголъ.

Изъ уравненія $tg\,(\theta-\theta')=-\frac{a}{b}$ или уравненія $\frac{tg\theta+tg\theta'}{1-tg\theta.tg\theta'}=\frac{a}{b}$, зная одинъ уголъ возвышенія, легко найдется и другой; и будетъ относительно искомаго угла, на примѣръ θ', $tg\theta'=\frac{ab+tg\theta}{atg\theta-b}$:

Не забывая при семъ удержать приличный положенію предмета знакъ количества b.

Въ практическихъ дѣйствіяхъ, изъ двухъ угловъ возвышенія θ и θ' мортиры, употребляютъ большій уголъ, бросая бомбы въ непріятельскіе корабли, въ крѣпости для разрушенія сводовъ, потолковъ и проч., а меньшій употребляютъ, бросая бомбы при осадахъ и оборонахъ крѣпостей въ плацдармы, въ бастіоны, въ траншеи на батареи и вообще во всѣ тѣ мѣста, гдѣ бываетъ собрано много людей, дабы онѣ, восходя не высоко на своемъ летѣ вверхъ, при паденіи врывались не глубоко въ землю, и чрезъ то разрывомъ своимъ наносили людямъ сильнѣйшій вредъ.

§ 15. Изслѣдуемъ еще сумму угловъ, составляемыхъ прямою АВ, проведенною отъ точки метанія къ предмету, съ двумя направленіями

АС и АС′, по которымъ брошенный съ равною скоростію снарядъ достигаетъ предмета В. Положивъ $< EAC = \theta$ и $< EAC' = \theta'$, мы уже нашли въ предъидущемъ параграфѣ, что тангенсъ послѣдняго угла θ' равенъ $\frac{a + b tg\theta}{a tg\theta - b}$; по сему относительно угла С′АН, который составляетъ дополненіе онаго къ 90°, будетъ

$$tg C'AH = \frac{a tg\theta - b}{a + b tg\theta};$$

но уголъ $CAB = < CAE - BAE = \theta - \alpha$, и при семъ $tg\alpha = \frac{b}{a}$, то будемъ имѣть

$$tg CAB = \frac{a tg\theta - b}{a + b tg\theta};$$

изъ сего явствуетъ, что $< C'AH = < CAB$, и сумма $< C'AB + < CAB = < HAB$...

Подобнымъ образомъ найдется и при положеніи предмета ниже горизонта, что сумма $< C'AB + < CAB = < HAB$ (фиг. 6). Слѣдовательно сумма угловъ составляемыхъ прямою, проведенною отъ предмета къ орудію, съ двумя направленіями, по которымъ одинакіе выстрѣлы производятся въ тотъ же предметъ, равняется углу, заключающемуся между сею прямою и вертикальною линіею. И такъ въ томъ случаѣ, когда два разныя направленія сли-

ваются въ одно, сей уголъ дѣлится имъ на двѣ равныя части.

О силѣ бросанія снарядовъ или начальной ихъ скорости, зависящей отъ силы пороха.

§ 16. Когда извѣстны уголъ бросанія и положеніе предмета, то изъ уравненія (§ 13)

$$a^2 tg^2\theta - 4ahtg\theta = -a^2 - 4bh,$$

которое даетъ

$$h = \frac{a^2(1+tg^2\theta)}{4(atg\theta - b)} = \frac{a^2}{4cos^2\theta(atg\theta - b)},$$

получимъ начальную скорость (§ 4)

$$u = \sqrt{2gh} = \frac{a}{2cos\theta}\sqrt{\frac{2g}{atg\theta - b}} \quad \ldots\ldots (1):$$

въ случаѣ предмета, находящагося ниже горизонта орудія, сія скорость будетъ

$$u = \frac{a}{2cos\theta}\sqrt{\frac{2g}{atg\theta + b}},$$

а въ случаѣ предмета, находящагося на одномъ горизонтѣ съ орудіемъ, будетъ

$$u = \sqrt{\frac{ag}{sin(2\theta)}}.$$

Уравненіе (1), относящееся къ первому положенію предмета, когда онъ находится надъ горизонтомъ дула орудія показываетъ, что должно быть $tg\theta > \frac{b}{a}$; въ противномъ случаѣ начальная скорость сдѣлается невозможною. Въ

случаѣ $tg\theta = \frac{b}{a}$ начальная скорость становится безконечною, слѣдовательно также невозможною. Въ уравненіи, принадлежащемъ ко второму положенію, подобное замѣчаніе имѣетъ мѣсто, когда направленіе метанія простирается подъ горизонтъ AE (фиг. 6), ибо въ такомъ случаѣ $tg\theta$ будетъ отрицательный. Уравненіе, относящееся къ третьему положенію предмета, ни чѣмъ не различно отъ найденнаго (e) въ (§ 7).

Если орудіе наведено будетъ постоянно подъ угломъ возвышенія $\theta = 45°$, тогда будемъ имѣть

При 1-мъ положеніи предмета $u = a\sqrt{\frac{g}{a-b}}$

— 2-мъ . . . . . $u = a\sqrt{\frac{g}{a+b}}$ (m).

— 3-мъ . . . . . $u = \sqrt{ag}$

Примѣръ 1. Извѣстны уголъ возвышенія $= 40$ градусамъ, отстояніе предмета отъ орудія $= 1500$ фут., и высота предмета $= 240$ фут.; требуется найти начальную скорость снаряда или силу пороховаго заряда.

Условія сіи даютъ $a = 1500$, $b = 240$, $\theta = 40°$; при семъ принявъ $g = 32$ фут. Русскимъ и употребивъ логарифмы для вычисленія скорости по формулѣ

$$u=\frac{a}{2\cos\theta}\sqrt{\frac{2g}{atg\theta-b}}=\frac{4a}{\cos\theta\sqrt{atg\theta-b}}$$

будемъ имѣть

$log4a$ . . .	3,7781513	$loga$=....	3,1760913
ариѳ. допол. $logcos\theta$ . .	0,1157460	$logtg\theta$=	9,9258135-10
ариѳ. допол. $\frac{1}{2}log\ atg\theta-b$)..	8,4959875-10	$log(atg\theta)$..	3,0999048
сумма	2,3898848=$logu$	$atg\theta$=	1258,65
отсюда	u=245,4 фут.	b=	240
		$atg\theta-b$=	1018,65

и такъ искомая начальная скорость, съ которою должно бросить снарядъ, составляетъ около 245 футовъ въ одну секунду.

Если понадобилось бы еще знать второй уголъ возвышенія θ', подъ которымъ бы, при той же начальной скорости, брошенный снарядъ достигнулъ даннаго предмета, то оный найдется изъ уравненія $\theta+\theta'=90^\circ+\alpha$ (§ 14), опредѣляя наперед $tg\alpha=\frac{b}{a}=\frac{4}{25}$ и $\alpha=9^\circ5'25''$, а потомъ $\theta'=59^\circ5'25''$.

Примѣръ 2. Если на разстояніи 1500 фут. предметъ находится ниже горизонта орудія на 240 фут., и при семъ удерживается тотъ же уголъ возвышенія 40°, то по поставленіи сихъ величинъ въ уравненіе $u=\frac{4a}{\cos\theta\sqrt{atg\theta+b}}$, получимъ начальную скорость u=202, 3 фут. Второй уголъ возвышенія θ', подъ которымъ сна-

рядъ достигаетъ даннаго предмета, будучи брошенъ съ такою же скоростію, найдется изъ уравненія $\theta + \theta' = 90^\circ - \alpha$ (§ 13); и будетъ $\theta' = 40^\circ$ 54′ 35″.

Примѣръ 3. Если орудіе наведено будетъ подъ угломъ 45°, то вычисленіе сдѣлается проще и найдется, по даннымъ величинамъ въ предъидущихъ примѣрахъ, что при первомъ положеніи предмета начальная скорость = 239 фут., при 2-мъ = 203, 4 фут., при 3-мъ равна 219 фут.

§ 17. Хотя формула (1) не даетъ истинной начальной скорости снаряда, когда онъ движется въ сопротивляющейся срединѣ, однако съ пользою можетъ служить къ сравненію скоростей, произведенныхъ двумя зарядами пороха, мало между собою различающимися; и въ особенности къ сравненію скоростей или силы одинакихъ величинъ зарядовъ, но разнаго качества пороха. На примѣръ, при употребленіи пробной мортирки, которая ставится подъ угломъ въ 45 градусовъ возвышенія, въ безвоздушномъ пространствѣ, для горизонтальной дальности a паденія, получается начальная скорость $u = \sqrt{ga} = \sqrt{32{,}214.a}$. Но въ воздухѣ хотя

и должно быть необходимо $u > \sqrt{ga}$, однако безъ чувствительной погрѣшности принять можно, что начальныя скорости, пропорціональны корнямъ квадратнымъ изъ дальностей a. И такъ, когда при испытаніи двухъ сортовъ пороха, 9 золотниковъ перваго, бросять ядро на разстояніе a, и столько же золотниковъ втораго, бросять то же самое ядро на разстояніе A, то безъ ошибки заключить можно, что сила перваго пороха или начальная скорость снаряду имъ сообщаемая, относится къ силѣ или къ начальной скорости втораго, какъ $\sqrt{a}$: $\sqrt{A}$. Справедливость сего заключенія явствуетъ еще изъ того, что при весьма малой скорости ядра, которое бросается съ малымъ количествомъ пороха, описываемая имъ кривая линія, почти не отходитъ отъ параболы.

§ 18. Въ случаѣ горизонтальной дальности AK$=c$ (фиг. 5 и 6) имѣемъ уравненіе (§ 16) $u^2 = \frac{cg}{\sin 2\theta}$; въ случаѣ же предмета B, коего положеніе опредѣляется разстояніями a и b, имѣемъ, при тѣхъ же количествахъ u и θ или для кривой ABK, проходящей чрезъ сей предметъ и имѣющей горизонтальное распростра-

неніе $= c$, уравненіе (§ 16) $u^2 = \frac{ag^2}{2\cos^2\theta(a\,tg\theta + b)}$, отсюда по сравненіи и надлежащемъ сокращеніи получимъ, по даннымъ количествамъ a, b и θ, горизонтальное распространеніе

$$c = \frac{a^2 tg\theta}{a\,tg\theta + b} = \frac{a^2}{a + b\,cotg\theta} \ldots\ldots (n),$$

потомъ и начальную скорость

$$u = \sqrt{\frac{cg}{\sin 2\theta}},$$

по которой можно будетъ судить о величинѣ пороховаго заряда.

Если уголъ возвышенія $\theta = 45°$, то будемъ имѣть:

$$c = \frac{a^2}{a + b}, \quad u = \sqrt{cg};$$

не забывая при семъ, что два знака — и + предполагаютъ предметъ находящимся, или выше или ниже горизонта.

Сіи формулы могутъ быть съ пользою употребляемы при небыстрыхъ движеніяхъ бомбы (§ 9), бросаемой разными небольшими зарядами подъ постояннымъ угломъ возвышенія мортиры, и по предметамъ не находящимся на одномъ горизонтѣ съ оною. Если чрезъ опыты и чрезъ вычисленіе составлена будетъ таблица,

содержащая въ себѣ, при томъ же возвышеніи мортиры, различныя горизонтальныя дальности паденія бомбы и соотвѣтствующія величины пороховыхъ зарядовъ или начальныя скорости, сообщаемыя ими бомбѣ, тогда съ помощію таковой таблицы и формулы (n) безъ большаго труда можно будетъ знать всегда тотъ зарядъ, который слѣдуетъ употребить, дабы добросить бомбу до предмета, находящагося выше или ниже горизонта орудія.

О времени полета снарядовъ.

§ 19. Время движенія снаряда отъ точки метанія A до предмета B найдется изъ уравненій (b) § 4. Ибо положивъ $x=a$, $y=b$ получимъ изъ перваго, время

$$t=\frac{a}{u\cos\theta}$$ въ секундахъ;

или исключивъ между оными скорость u, будемъ имѣть $\frac{1}{2}gt^2=atg\theta-b$ и

$$t=\sqrt{\frac{2(atg\theta-b)}{g}}\ldots\ldots\ldots(o),$$

что выражаетъ время въ секундахъ, употребляемое тѣломъ на достиженіе предмета.

Въ послѣднемъ уравненіи количество b бываетъ или положительнымъ, или отрицательнымъ или равнымъ нулю, смотря потому, на-

ходится ли предметъ выше или ниже горизонта орудія, или на самомъ семъ горизонтѣ. Если уголъ возвышенія θ предположится равнымъ 45°, тогда будетъ

$$t=\sqrt{\frac{2}{g}(a-b)}, \text{ и } t=\sqrt{\frac{2a}{g}} \text{ когда } b=o.$$

Изъ уравненія (o), помощію какихъ либо трехъ данныхъ изъ четырехъ количествъ t, a, $tg\theta$ и b, найдется четвертое. На примѣръ, зная время полета, уголъ бросанія и одно изъ двухъ разстояній a и b, найдемъ и другое

$$a=\frac{\frac{1}{2}gt^2+b}{tg\theta}, \quad b=atg\theta-\frac{1}{2}gt^2;$$

а въ случаѣ предмета, разсматриваемаго на горизонтѣ, горизонтальное разстояніе будетъ

$$a=\frac{gt^2}{2tg\theta}.$$

По извѣстному времени, употребляемому тѣломъ *на пробѣжаніе своего пути, и углу* возвышенія, найдется начальная скорость бросанія изъ уравненія $t=\frac{a}{u\cos\theta}$, которая будетъ

$$u=\frac{a}{t\cos\theta}.$$

О скорости, съ которою снарядъ ударяетъ въ предметъ.

§ 20. Скорость снаряда въ каждой точкѣ

пути имъ описываемаго, направлена бываетъ по касательной линіи, и равна корню квадратному изъ суммы квадратовъ, составляющихъ скоростей, взятыхъ въ горизонтальномъ и вертикальномъ направленіяхъ (Мех. Франкера чл. 167). Но сіи скорости суть (§ 4) $\frac{dx}{dt}=u\cos\theta$ по направленію горизонтальному, и $\frac{dy}{dt}=u\sin\theta-gt$ по направленію вертикальному, и такъ означивъ дѣйствительную скорость движущагося тѣла чрезъ v, будемъ имѣть

$$v=\sqrt{\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}}=\sqrt{u^2-2g\left(u\sin\theta.t-\frac{gt^2}{2}\right)},$$

или, по причинѣ $u\sin\theta.t-\frac{gt^2}{2}=y$ (§ 4), будетъ

$$v=\sqrt{u^2-2gy}=\sqrt{2g(h-y)}\ldots\ldots\ldots(\text{p}),$$

сдѣлавъ $y=b$ получимъ $v=\sqrt{2g(h-b)}$, то есть ту скорость, съ которою снарядъ ударяетъ въ предметъ, находящійся на возвышеніи отъ горизонта орудія равномъ b. Если предметъ будетъ ниже сего горизонта, тогда $v=\sqrt{2g(h+b)}$; если же на самомъ горизонтѣ, то $v=\sqrt{2gh}=u$, и слѣдовательно скорость паденія снаряда равна начальной скорости его верженія.

Формулы для рѣшенія задачъ, относящихся къ Артиллерійскому прицѣлу (діоптру).

§ 21. По причинѣ зазора въ орудіяхъ и другихъ обстоятельствъ, рѣдко выбрасывается снарядъ по направленію оси канала. А какъ не возможно знать напередъ, каково должно быть для каждаго бросаемаго снаряда уклоненіе отъ сей оси и в ъкакую сторону, то принужденными находимся предположить въ Теоріи вылетъ снаряда по самой оси канала орудія, и чрезъ то допустить полетъ онаго, совершающійся въ вертикальной плоскости, проходящій чрезъ сію ось.

Слѣдовательно навести пушку такъ, чтобы пущеннымъ изъ нея ядромъ, попасть въ желаемый предметъ, значитъ тоже, что направить вертикальную плоскость, проходящую чрезъ ось на сей предметъ, давъ притомъ оси орудія надлежащее положеніе.

Вертикальная плоскость, проходящая чрезъ ось орудія, направляется въ предметъ, употребляя для сего или прицѣлъ при прицѣливаніи пушекъ и единороговъ, или треногу съ отвѣсикомъ при прицѣливаніи мортиръ. При чемъ относительно прицѣдлла ожно замѣтить, что

когда онъ будетъ неподвижный или прикрѣпленный къ орудію такъ, что всякая линія прицѣливанія и ось канала, постоянно находятся въ одной плоскости перпендикулярной къ оси цапфъ, какъ бы орудіе на сторону наклонено ни было, тогда непремѣннымъ условіемъ должно быть то, дабы прицѣливаемое орудіе своими цапфами не наклонялось ни на которую сторону. Ибо вертикальная плоскость, проходящая чрезъ линію прицѣливанія идущую къ предмету, содержать будетъ въ себѣ ось канала только тогда, когда ось цапфъ приведется въ горизонтальное положеніе; при иномъ же положеніи сей оси, вертикальная плоскость, проходящая чрезъ линію прицѣливанія направленную къ предмету, приметъ направленіе различное отъ направленія вертикальной плоскости, проходящей чрезъ ось канала, и пересѣчетъ сію послѣднюю по отвѣсной линіи проходящей чрезъ точку, гдѣ прицѣльная линія соединяется съ осью: а поелику сіе соединеніе находится въ весьма близкомъ разстояніи отъ отверстія орудія, то предметъ, который несравненно далѣе отстоитъ отъ орудія и находится въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ

линію прицѣливанія, не будетъ уже помѣщенъ въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ ось канала, онъ тѣмъ болѣе отойдетъ отъ нея въ сторону, чѣмъ предметъ будетъ болѣе, и чѣмъ большій составится уголъ наклоненія, между двумя сказанными вертикальными плоскостями, который, какъ явно, увеличивается по мѣрѣ большаго склоненія оси цапфъ и большей высоты прицѣла. Отъ чего и произойдетъ, что ядро полетитъ въ лѣво, когда цѣлено въ право; и обратно.

При употребленіи привѣснаго прицѣла не требуется необходимо, чтобы ось цапфъ была горизонтальная. Въ самомъ дѣлѣ, по свойству сего прицѣла оставаться всегда въ вертикальномъ положеніи, какъ бы орудіе на сторону наклонено ни было, всякая линія прицѣливанія, съ линіею, идущею чрезъ точку привѣса прицѣла и чрезъ верхъ мушки, всегда находится въ вертикальной плоскости. А какъ послѣдняя линія параллельна оси орудія, посему вертикальная плоскость, проходящая чрезъ линію прицѣливанія, если не пройдетъ чрезъ ось канала, то по крайней мѣрѣ пребудетъ ей параллельна, въ какомъ бы положеніи ось цапфъ

ни была. По этому для практическаго употребленія все равно, по настоящей ли вертикальной плоскости чрезъ ось канала проходящей направимъ орудіе, или по другой проходящей весьма близко и параллельной къ оной, сквозь прицѣлъ чрезъ верхъ мушки; ибо обѣ сіи плоскости, будучи параллельны между собою, идутъ по одному направленію и слѣдовательно ведутъ къ одному и тому же предмету.

Для возвышенія или пониженія канала орудія на дальное число градусовъ въ отношеніи къ горизонту употребляютъ квадрантъ.

§ 22. Если орудіе наводится по прицѣлу, то линія прицѣливанія IHM (фиг. 7) съ осью ABD канала или съ линіею сй параллельною GHE, идущею чрезъ верхъ мушки къ срединѣ торельнаго пояса или къ точкѣ привѣса прицѣла, составляетъ тотъ уголъ IHG=ICA, на который ставится орудіе въ отношеніи къ линіи прицѣливанія. Уголъ сей называется *угломъ прицѣливанія.* Но мы видѣли въ § 5, что кривая BOF полетомъ ядра описываемая въ точкѣ бросанія, которая находится въ самомъ отверстіи орудія, имѣетъ касательною направленіе мѣтанія или ось канала AB, по сему если ли-

пія прицѣливанія не параллельна оси канала, сія кривая пресѣкаетъ оную въ двухъ точкахъ N и M, изъ коихъ одна находится близь орудія, а другая въ отдаленности есть та сама, куда ядро попасть должно, и чѣмъ выше поднимется дуло орудія, тѣмъ болѣе первая точка приближится къ орудію, а вторая отъ онаго удалится. Различныя обстоятельства такого рода выстрѣловъ, производимыхъ по прицѣлу изслѣдованы будутъ послѣ. Между тѣмъ, мы выведемъ отношеніе между угломъ прицѣливанія, соотвѣтствующею высотою прицѣла и угломъ возвышенія.

Для сего, пусть будетъ высота IG висячаго прицѣла$=n$; разстояніе GH точки привѣса его отъ вершины мушки$=m$; уголъ прицѣливанія IHG$=$HCB$=\gamma$; и уголъ возвышенія DBP, составляемый осью канала съ горизонтомъ$=\theta$: послѣдній сей уголъ со знакомъ *минусъ* взятый, означаетъ уголъ пониженія орудія.

Изъ треугольника GHI, по сравненіи сторонъ съ синусами противоположныхъ угловъ, получимъ уравненіе $IG = \frac{GH.\,sin\,GHI}{sin\,GIH}$, или $n = \frac{m sin\,\gamma}{sin GIH}$. Проведши же въ вертикальной

плоскости GIH горизонтальную линію IK, и замѣтивъ, что прицѣлъ всегда пребываетъ въ вертикальномъ положеніи, будемъ имѣть уголъ GIH=GIL+LIH=GIL+ILA—ICL=$90^{\circ}+\theta-\gamma$: сіе выраженіе есть общее для всѣхъ различныхъ трехъ положеній предмета въ отношеніи къ тому мѣсту, на которомъ стоитъ орудіе, и показываетъ, что если предметъ находится на одномъ горизонтѣ съ орудіемъ, тогда уголъ возвышенія θ равенъ углу прицѣливанія γ и уголъ GIH=90°; а если предметъ находится выше орудія, тогда $\theta>\gamma$ и уголъ GIH тупой; если же ниже, тогда $\theta<\gamma$ и уголъ GIH острый. Поставимъ теперь вмѣсто угла GIH равную величину, уравненіе $n=\frac{m\sin\gamma}{\sin\mathrm{GIH}}$ обратится въ слѣдующее

$$n=\frac{m\sin\gamma}{\cos(\theta-\gamma)} \quad \ldots\ldots(\mathrm{q}),$$

изъ котораго, зная прицѣльный уголъ γ и уголъ возвышенія орудія=θ, найдется высота n привѣснаго прицѣла, равная разстоянію отъ верха мушки до точки привѣса прицѣла, умноженному на синусъ угла прицѣливанія и раздѣленному на косинусъ разности между угломъ возвышенія и угломъ прицѣливанія. Уголъ KIM,

составляющій сію разность и заключающійся между лучемъ зрѣнія, направленнымъ къ предмету и горизонтальною линіею, можно назвать, смотря по положенію предмета, *угломъ возвышенія мѣстности* или *склоненія мѣстности*. Практически находятъ его удобно посредствомъ квадранта и чрезъ прицѣливаніе орудія поверхъ торели и мушки въ данный предметъ.

§ 23. Если, сверхъ данныхъ величинъ m и n, извѣстенъ будетъ уголъ мѣстности $\theta - \gamma = \delta$, то изъ уравненія (q), для опредѣленія величины угла прицѣливанія γ, будемъ имѣть

$$\sin \gamma = \frac{n\cos\delta}{m}.$$

Сей уголъ γ найдется также и въ томъ случаѣ, когда даны будутъ величины m, n и θ, не имѣя при семъ угла мѣстности; ибо, представивъ уравненіе (q) въ видѣ $\frac{\cos(\theta-\gamma)}{\sin\gamma} = \frac{m}{n}$ или $\frac{\cos\theta}{tg\gamma} + \sin\theta = \frac{m}{n}$, отсюда получимъ

$$tg\gamma = \frac{n\cos\theta}{m - n\sin\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots (r),$$

Помощію сего выраженія, уголъ γ выразится чрезъ слѣдующій весьма приближающійся рядъ

$$\gamma = \frac{n}{m}\cos\theta + \frac{n^2}{2m^2}\sin 2\theta - \frac{n^3}{3m^3}\cos 3\theta - \frac{n^4}{4m^4}\sin 4\theta + \ldots\ldots(*)$$

§ 24. Въ томъ случаѣ, когда линія прицѣливанія горизонтальна, будетъ $\theta = \gamma$ и уравненіе (q), приметъ простѣйшій видъ

$$n = m\sin\theta,$$

показывающій, что высота прицѣла равна разстоянію верха мушки отъ точки привѣса прицѣла, умноженному на синусъ угла прицѣливанія или возвышенія.

Послѣднее уравненіе даетъ для опредѣленія угла θ, по даннымъ величинамъ m и n, слѣдующее выраженіе

$$\sin\theta = \frac{n}{m}.$$

§ 25. Сверхъ обозначеній въ § 22, пусть будетъ горизонтальное разстояніе BP предмета $= a$; вертикальное его возвышеніе MP $= b$; разстояніе отъ точки бросанія до предмета, или дальность BM $= \sqrt{a^2 + b^2} = l$; уголъ MBP, составляемый симъ разстояніемъ съ горизонтальною линіею $=$ I; и разстояніе вершины мушки до оси $= k$. Изъ треугольника BMH, въ которомъ

(*) Смотри *начертаніе прямолинейной тригонометріи.* Сочиненіе Г. Навроцкаго. § 50.

уголъ BMH=BCH—CBM=$\gamma-(\theta-\alpha)$, и уголъ BHC=$90°-\gamma$, пославъ пропорцію

BM : BH=sin BHC : sin BMH,

или

$$l : k = cos\gamma : sin\{\gamma-(\theta-\alpha)\},$$

получимъ

$$kcos\gamma = lsin\{\gamma-(\theta-\alpha)\};$$

отсюда, по разложеніи синуса разности угловъ и раздѣленіи на $cos\gamma$, будемъ имѣть

$$tg\gamma = \frac{lsin(\theta-\alpha)+k}{lcos(\theta-\alpha)} \text{ или } = tg(\theta-\alpha)+\frac{k}{lcos(\theta-\alpha)};$$

слѣдовательно помощію сей формулы, когда извѣстны будутъ уголъ возвышенія и положеніе предмета, опредѣляется уголъ прицѣливанія. Далѣе уравненіе (q), разложивъ въ немъ косинусъ разности угловъ, даетъ.

$$n = \frac{mtg\gamma}{cos\theta+sin\theta tg\gamma},$$

и поставивъ на мѣсто $tg\gamma$ предъидущую величину, получимъ въ функціи данныхъ количествъ высоту прицѣла

$$n = \frac{mlsin(\theta-\alpha)+mk}{lcos\alpha+ksin\theta} \ldots\ldots (s).$$

Предъидущая пропорція заключаетъ въ себѣ зависимость угла BMH отъ величинъ k, l и γ,

и показываетъ, что $sin BMH = \frac{k cos\gamma}{l}$. Если пренебрежемъ сей весьма малый уголъ BMH или, вмѣсто его, разстояніе k оси канала отъ верха мушки, ничтожное почти въ сравненіи съ дальностію l предмета и составляющее у самыхъ большихъ орудій менѣе одного фута, то отъ формулъ, выведенныхъ въ семъ параграфѣ, перейдемъ къ формуламъ (q) и (r). Ибо въ такомъ преположеніи будетъ

$\gamma - (\theta - \alpha) = o$ или $\gamma = \theta - \alpha$ и $\alpha = \theta - \gamma = \delta$.....

§ 26. Если вмѣсто привѣснаго прицѣла будетъ неподвижный IG (фиг. 8), который прикрѣпляютъ къ орудію въ положеніи перпендикулярномъ къ оси, то въ случаѣ высоты его считаемой отъ точки, находящейся съ верхомъ мушки на линіи GH параллельной оси канала, какъ у нашихъ прежнихъ прицѣловъ, будемъ имѣть изъ треугольника IGH, прямоугольнаго при точкѣ G, слѣдующія, простыя формулы для опредѣленія или угла прицѣливанія или высоты прицѣла.

$$tg GHI = \frac{GI}{GH}, \quad GI = GH.\ tg GHI,$$

или

$$tg\,\gamma = \frac{n}{m}, \quad n = m\,tg\,\gamma,$$

кои, очевидно, не зависятъ отъ угла возвышенія θ.

Въ случаѣ же высоты G′I, считаемой отъ верха торели или вообще отъ такой точки, которая еъ верхомъ мушки или съ дульнымъ возвышеніемъ, когда нѣтъ ея вовсе, не находится на линіи GH параллельной оси канала, надобно изъ найденной выше высоты GI = GH tg GHI вычесть разность GG′ = AG — BH = R — r между толщиною орудія у торели и толщиною у дульнаго возвышенія вмѣстѣ съ высотою мушки; и будетъ тогда

$$n = m\,tg\,\gamma - (\mathrm{R} - r), \quad tg\,\gamma = \frac{n + \mathrm{R} - r}{m}.$$

§ 27. По формулѣ (q) вычислены слѣдующія таблицы, показывающія высоту привѣснаго прицѣла у легкихъ, батарейныхъ и осадныхъ мѣдныхъ пушекъ и единороговъ, при различномъ углѣ прицѣливанія и углѣ возвышенія мѣстности.

Углы прицѣливанія общіе угламъ мѣстности.	I. Для 24-хъ-фунтовой пушки, разстояніе отъ верха пушки до точки привѣса прицѣла m=127,169 дюйма, и высота прицѣла въ линіяхъ, какъ показано здѣсь ниже.			II. Для 18-ти-фунтовой пушки, разстояніе отъ верха пушки до точки привѣса прицѣла m=115, 84 дюйма, а высота прицѣла въ линіяхъ, какъ показано ниже.		
	При углѣ мѣстности равномъ 0°.	При углѣ мѣстности =5°.	При углѣ мѣстности =10°.	При углѣ мѣстности равномъ 0°.	При углѣ мѣстности =5°.	При углѣ мѣстности =10°.
0°—30′	11,09 линій	11,14 л.	11,27 л.	10,11 линій	10,15 л.	10,26 л.
1—..	22,19 ——	22,28—	22,54—	20,22 ——	20,29—	20,53—
1—30	33,29 ——	33,42—	33,80—	30,32 ——	30,44—	30,79—
2—..	44,38 ——	44,55—	45,06—	40,42 ——	40,58—	41,05—
2—30	55,47 ——	55,68—	56,32—	50,52 ——	50,72—	51,31—
3—...	66,55 ——	66,81—	67,58—	60,62 ——	60,86—	61,56—

	III. Для 12-ти-фунтовой пушки, разстояніе отъ верха пушки до точки привѣса прицѣла m=80,76 дюйма, а высота прицѣла въ линіяхъ, какъ показано здѣсь ниже.			IV. Для 6-ти-фунтовой пушки, разстоанія отъ верха пушки до точки привѣса прицѣла m=65, 85 дюйм., а высота прицѣла въ линіяхъ, какъ показано здѣсь ниже.		
	При углѣ мѣстности равномъ 0°.	При углѣ мѣстности =5°.	При углѣ мѣстности =10°.	При углѣ мѣстности равномъ 0°.	При углѣ мѣстности =5°.	При углѣ мѣстности =10°.
0°—30′	7,05 линій	7,07 л.	7,15 л.	5,74 линій	5,77 л.	5,85 л.
1—...	14,10 ——	14,15—	14,31—	11,49 ——	11,54—	11,67—
1—30	21,15 ——	21,22—	21,47—	17,24 ——	17,31—	17,51—
2—...	28,19 ——	28,29—	28,62—	22,98 ——	23,07—	23,34—
2—30	35,23 ——	35,36—	35,77—	28,72 ——	28,83—	29,17—
3—...	42,27 ——	42,43—	42,92—	34,46 ——	34,59—	34,99—
3—30	49,31 ——	49,49—	50,06—	40,20 ——	40,35—	40,82—
4—..	56,34 ——	56,55—	57,20—	45,93 ——	46,11—	46,64—
4—30	63,37 ——	63,61—	64,34—	51,66 ——	51,86—	52,46—
5—...				57,39 ——	57,61—	58,28—
5—30				63,11 ——	63,35—	64,09—

Углы прицѣливанія общіе углами мѣстности.	V. У пудоваго единорога, разстояніе отъ верха мушки до точки привѣса прицѣла m=82,695 дюйма, а высота прицѣла въ линіяхъ, какъ показано ниже.			VI. Для $\frac{7}{8}$ пудоваго единорога, разстояніе отъ верха мушки до точки привѣса прицѣла m=66, 5 дюйма, а высота прицѣла въ линіяхъ, какъ показано здѣсь ниже.		
	При углѣ мѣстности равномъ 0°	При углѣ мѣстности =5°.	При углѣ мѣстности =10°.	При углѣ мѣстности равномъ 0°	При углѣ мѣстности =5°.	При углѣ мѣстности =10°.
0°—50′	7,22 линій	7,24 л.	7,55 л.	5,78 линій	5,81 л.	5,87 л.
1— ..	14,45 ——	14,49—	14,65—	11,57 ——	11,62—	14,75—
1—30	21,64 ——	21,75—	21,98—	17,56 ——	17,42—	17,62—
2—..	28,86 ——	28,97—	29,30—	25,14 ——	23,23—	25,49—
2—30	56,07 ——	56,21—	56,62—	28,92 ——	29,03—	29,56—
3—...	43,28 ——	43,44—	43,94—	34,70 ——	34,85—	35,25—
3—30	50,48 ——	50,67—	51,26—	40,48 ——	40,65—	41,10—
4—...	57,68 ——	57,90—	58,57—	46,25 ——	46,45—	46,96—
4—30	64,88 ——	65,13—	65,88—	52,02 ——	52,22—	52,82—
5—..				57,78 ——	58,00—	58,67—
5—30				63,55 ——	63,79—	64,53—

Углы прицѣливанія общіе угламъ мѣстности.	VII. Для $\frac{1}{4}$ пудоваго единорога, разстояніе отъ верха мушки до точки привѣса прицѣла m=55,21 дюйма, а высота прицѣла въ линіяхъ, какъ показано ниже.			VIII. Для 3-хъ-фунтоваго единорога, разстояніе отъ верха мушки до точки привѣса прицѣла m=57,62 дюйма, а высота прицѣла въ линіяхъ, какъ показано ниже.		
	При углѣ мѣстности равномъ 0°.	При углѣ мѣстности =5°.	При углѣ мѣстности =10°.	При углѣ мѣстности равномъ 0°.	При углѣ мѣстности =5°.	При углѣ мѣстности =10°.
0°—30′	4,82 линій	4,85 л.	4,88 л.	5,28 линій	5,29 л.	5,33 л.
1—...	9,64 ——	9,67—	9,78—	6,57 ——	6,59—	6,67—
1—30	14,46 ——	14,51—	14,68—	9,85 ——	9,89—	10,00—
2—...	19,27 ——	19,34—	19,57—	13,13 ——	13,18—	13,33—
2—30	24,08 ——	24,18—	24,46—	16,41 ——	16,47—	16,66—
3—..	28,89 ——	29,01—	29,34—	19,69 ——	19,76—	19,99—
3—30	33,70 ——	33,84—	34,25—	22,97 ——	23,05—	23,32—
4—...	38,51 ——	38,66—	39,11—	26,24 ——	26,34—	26,65—
4—30	43,32 ——	43,48—	43,99—	29,51 ——	29,63—	29,97—
5—...	48,12 ——	48,30—	48,86—	32,78 ——	32,91—	33,29—
5—30	52,92 ——	53,11—	53,75—	36,05 ——	36,19—	36,61—
6—...	57,71 ——	57,93—	58,60—	39,32 ——	39,47—	39,93—
6—30	62,50 ——	62,74—	63,46—	42,59 ——	42,75—	43,24—
7—..				45,85 ——	46,02—	46,55—
7—30				49,11 ——	49,29—	49,86—
8—...				52,36 ——	52,55—	53,17—
8—30				55,61 ——	55,82—	56,46—
9—...				58,85 ——	59,08—	59,76—
9—30				62,09 ——	62,33—	63,05—

Посредствомъ сихъ таблицъ могутъ быть вычислены, способомъ простой интерполяціи, тѣ высоты прицѣла, кои принадлежатъ угламъ не заключающимся въ таблицѣ; и обратно.

Вычисленіе рикошетныхъ выстрѣловъ по Параболической Теоріи.

§ 28. Употребленіе рикошетныхъ выстрѣ-

ловъ при осадахъ крѣпостей состоитъ въ опредѣленіи такого заряда и въ назначеніи для орудія такого угла возвышенія, чтобы брошенное ядро, пролетѣвъ чрезъ брустверъ близь верхней точки гребня нисходящею вѣтвью своего полета, двигалось далѣе вдоль протяженія валганга и нисходящимъ своимъ полетомъ также и прыжками разрушало расположенные на немъ предметы.

Для произведенія сего дѣйствія, необходимо должно; 1) чтобы выстрѣлы произведены были вдоль по направленію валганга; 2) чтобы ядро въ своемъ полетѣ прошло возвышеннѣйшую точку, прежде достиженія бруствера; иначе оно можетъ пролетѣть чрезъ весь валгангъ, не сдѣлавъ на немъ никакого поврежденія; 3) чтобы ядро упало на землю подъ угломъ весьма острымъ, не только для того, чтобы въ оную не углублялось, но и для того, чтобы по своемъ отраженіи не дѣлало высокихъ прыжковъ и не соразмѣрныхъ съ высотою ниспровергаемыхъ предметовъ; и 4) чтобы, при сказанныхъ условіяхъ, ядру сообщена была, по возможности, большая скорость или большая сила удара.

§ 29) Приливъ въ соображеніе сіи условія; выведемъ формулы для рѣшенія важнѣйшихъ задачъ, относящихся къ рикошетной стрѣльбѣ.

Положимъ, что пушка AB (фиг. 9) наведена по направленію прямой AS; и пусть будетъ BP′P″, горизонтальная линія идущая отъ жерла орудія; BM′M″, кривая линія описанная ядромъ, K, брустверъ чрезъ вершину M, коего проходитъ сія кривая; M″ точка, въ которой также кривая встрѣчаетъ валгангъ, изображенный горизонтальною линіею KM″. Изъ точекъ M и M″ опустимъ на горизонтальную линію BP″ перпендикуляры MP и M″P″, и чрезъ вершину M′ кривой проведемъ ось M′P′, и продолжимъ ее до пресѣченія съ направленіемъ бросанія BS въ точкѣ S. При дѣйствованіи рикошетами, какъ замѣчено выше, надобно, чтобы разстояніе BP′ отъ орудія до оси параболы менѣе было разстоянія BP сего орудія до брустверa, но вмѣстѣ съ тѣмъ болѣе половины сего разстоянія, и чтобы уголъ паденія ядра на валгангѣ въ точкѣ M″ довольно былъ острый. Въ практикѣ разстояніе BP и высоты MP и M″P″ почитаются извѣстнымъ: тригонометрическія измѣренія покажутъ величину линій BP и MP;

въ разсужденіи же высоты валганга M″P″, можно знать оную изъ обыкновенныхъ профилей укрѣпленій, и мы весьма мало ошибемся, полагая всегда точку M″ ниже точки M на 7 футовъ Русскихъ.

Сдѣлаемъ теперь BP′$=x$, M′P′$=y$, BP$=a$, MP$=b$, BP″$=a'$, M″P″$=b'$, уголъ бросанія SBP′ $=\theta$, уголъ паденія QM″N, составляемый касательною QM″ съ горизонтальною линіею NM″ $=\theta'$. Основываясь на извѣстномъ свойствѣ параболы, что подкасательная оной вдвое болѣе абсциссы, получимъ изъ прямоугольныхъ треугольниковъ BSP′ и QNM″

$$tg\ \mathrm{SBP'}=\frac{\mathrm{SP'}}{\mathrm{BP}}=\frac{2\mathrm{M'P'}}{\mathrm{BP'}}\quad \text{или}\quad tg\theta=\frac{2y}{x},$$

и $tg\ \mathrm{QM''N}=\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{NM''}}=\frac{2\mathrm{NM'}}{\mathrm{NM''}}$ или $tg\theta'=\frac{2(y-b')}{a'-x}$:

кромѣ сихъ двухъ уравненій имѣемъ еще три слѣдующія § 4 (d); для точки M′

$$y=xtg\theta-\frac{x^2}{4h\cos^2\theta},$$

для точки M

$$b=atg\theta-\frac{a^2}{4h\cos^2\theta},$$

и для точки M″

$$b'=a'tg\theta-\frac{a'^2}{4h\cos^2\theta}.$$

Посредствомъ сихъ пяти уравненій, содержащихъ въ себѣ девять количествъ x, y, a, b, a', b', θ', θ' и h можно будетъ, зная четыре изъ нихъ, опредѣлить остальныя. По сему, дабы задачи предложенныя относительно рикошетной стрѣльбы были опредѣленныя, необходимо должны въ себѣ заключать четыре данныя обстоятельства; въ противномъ же случаѣ онѣ останутся неопредѣленными. Но для удобнѣйшаго рѣшенія оныхъ выведемъ сперва, изъ предъидущихъ пяти уравненій, простѣйшія другія.

Для сего между уравненіями 3-мъ и 4-мъ, исключивъ величину h, получимъ $\frac{xtg\theta - y}{atg\theta - b} = \frac{x^2}{a}$; и поставивъ потомъ величину для $tg\theta$, взятую изъ перваго уравненія, найдемъ

$$y = \frac{bx^2}{2ax - a^2}:$$

такимъ же образомъ поступивъ съ уравненіями 3-мъ, 5-мъ и 1-мъ, получимъ

$$y = \frac{b'x'^2}{2a'x - a'^2}:$$

отсюда, если сравнимъ двѣ величины найденныя для y, будемъ имѣть

$$x = \frac{ba'^2 - b'a^2}{2(ba' - ab')}$$

Послѣ сего легко опредѣлимъ

$$tg\theta = \frac{2y}{x} = \frac{2bx}{2ax - x^2} = \frac{2b'x}{2a'x - a'^2} = \frac{ba'^2 - ba'^2}{aa'(a' - a)};$$

$$y - b' = \frac{b'(a' - x)^2}{2a'x - a'^2} = \frac{b(a' - x)^2}{2ax - a^2}, \text{ ибо } \frac{b}{2ax - a^2} = \frac{b'}{2a'x - a'^2};$$

$$tg\theta' = \frac{2(y\ b')}{a' - x} = \frac{2b(a'\ x)}{2ax - a^2} = \frac{2b'(a' - x)}{2a'x - a'^2} = \frac{ba'^2 + b'a - 2aa'b'}{aa'(a' - a)};$$

и $tg\theta : tg\theta' = \frac{2bx}{2ax - a^2} : \frac{2b(a' - x)}{2ax - a^2} = x : a' - x,$

также

$$tg\theta - tg\theta' = \frac{2b'x}{2a'x - a'^2} - \frac{2b'(a' - x)}{2a'x - a'^2} = \frac{2b'}{a'};$$

если между послѣднимъ здѣсь уравненіемъ и уравненіемъ 5-мъ исключимъ количество a', то получимъ

$$h\cos^2 tg\theta' = h\cos^2\theta tg^2\theta - b',$$

что приводится къ слѣдующему простому уравненію

$$h\cos^2\theta = (h - b')\cos^2\theta'..$$

Наконецъ рѣшивъ уравненія 1-е и 3-е въ отношеніи къ x и y, получимъ извѣстныя уже выраженія (§ 11)

$$x = 2h\sin\theta.\cos\theta, \text{ и } y = h\sin^2\theta.$$

И такъ уравненія:

1) $x = \frac{bb'^2 - b'a^2}{2(ba' - ab')};$

2) $y = \frac{bx^2}{2ax - a^2} = \frac{b'x^2}{2a'x - a'^2}$;

3) $tg\theta = \frac{2y}{x} = \frac{ba'^2 - b'a^2}{aa'(a' - a)}$;

4) $tg\theta' = \frac{ba'^2 + a^2b' - 2aa'b'}{aa'(a' - a)}$;

5) $y = h\sin^2\theta$ и $x = 2h\sin\theta.\cos\theta$;

6) $tg\theta = tg\theta' + \frac{2b'}{a'}$, или $a'tg\theta - b' = a'tg\theta' + b'$;

7) $h\cos^2\theta = (h - b')\cos^2\theta'$;

и 8) $xtg\theta' = (a' - x)tg\theta$

удобно прилагаются къ рѣшенію слѣдующихъ задачъ.

Задача I.

§ 30. Зная, разстояніе BP отъ орудія до бруствера R; высоту MP верхней точки гребня бруствера, чрезъ которую долженъ пролетѣть снарядъ; высоту $M''P''$ валганга, на который сей снарядъ долженъ упасть; и принявъ разстояніе BP' произвольнымъ, однако большимъ чѣмъ половина разстоянія BP: найти уголъ и начальную скорость бросанія, положеніе точки паденія M'', и уголъ паденія снаряда. Въ сей задачѣ извѣстны величины a, b, b' и x, а должно опредѣлить θ, a', θ' и h. Но взявъ въ раз-

смотрѣніе 2-е равенство, найдемъ сперва $y = \frac{bx^2}{2ax - a^2}$ и потомъ изъ уравненія $y = \frac{b'x^2}{2a'x - a'^2}$ получимъ

$$a' = x + x\sqrt{\frac{g - b'}{g}},$$

то есть разстояніе BP″, опредѣляющее положеніе точки паденія снаряда на валгангѣ; 3-е же уравненіе $tg\theta = \frac{2y}{x}$ дастъ уголъ возвышенія орудія. Теперь зная a' и $tg\theta$, найдется уголъ паденія θ' чрезъ пропорцію $tg\theta : tg\theta' = x : a' - x$, которая даетъ $tg\theta' = \frac{(a' - x)tg\theta}{x}$. Что касается до начальной скорости, которая здѣсь равна $\sqrt{2gh}$ (§ 4), она найдется, поставивъ на мѣсто количества h равную величину взятую изъ 5-го уравненія, и будетъ сія начальная скорость

$$u = \sqrt{2gh} = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{2gy}.$$

Для примѣра, положимъ, что разстояніе BP = 150 саженъ или = 1050 футъ; высота, на которой находится точка M отъ горизонта орудія = 30 футамъ; высота точки M″ *отъ сего же горизонта* = 23 фута, и сверхъ того примемъ, что *разстояніе* BP′ *составляетъ* $\frac{2}{3}$ *отъ* BP. И такъ въ семъ примѣрѣ будетъ:

$a=1050$, $b=30$, $b'=23$, $x=\frac{2}{3}a=700$:
поставивъ сіи числа въ выше найденныя формулы, получимъ 1) $y=\frac{bx^2}{2ax-a^2}=\frac{4}{5}b=40$ фут.; 2) $logtg\theta=log\left(\frac{2y}{x}\right)=9{,}0579920$, что соотвѣтствуетъ углу бросанія $\theta=6°31'11''$; 3) $a'=x+x\sqrt{\frac{y-b'}{y}}=1156{,}34$ фута, и отсюда $PP''=RM''=a'-a=106{,}34$ фута, сіе показываетъ, что ядро упадетъ на валгангъ въ разстояніи 15 саженъ и 1 футъ отъ боковаго бруствера, подъ угломъ θ', коего $log\,tg\theta'=log.\frac{(a'-x)tg\theta}{x}=8{,}8721825$ соотвѣтствуетъ $4°15'39''$; при семъ углѣ паденія ядро удобно дѣлаетъ рикошетъ и притомъ отлогій. Наконецъ начальная скорость снаряда будетъ $u=\frac{1}{sin\theta}\sqrt{2gr}=447$ футамъ въ секунду; здѣсь $g=32{,}2$ фута.

Задача II.

§ 31) Зная разстояніе BP, высоты MP и M″P″, и положеніе точки M″ на валгангѣ; найти разстояніе BP′ отъ орудія до оси параболы, углы бросанія и паденія, и начальную скорость ядра.

По вопросу извѣстны величины a, b, a' и

b'; прочія же x, θ, θ', h, y суть искомыя. Изъ 1-го уравненія будемъ имѣть $x = \frac{ba'^2 - b'a^2}{2(ba' - ab')}$, а изъ 2-го $y = \frac{bx^2}{2ax - a^2}$. Имѣя же x и y, получимъ, какъ и въ предъидущей задачѣ, уголъ θ возвышеніе орудія изъ уравненія $tg\theta = \frac{2y}{x}$; уголъ θ' паденія ядра изъ уравненія $tg\theta' = \left(\frac{a' - x}{x}\right) tg\theta$; и начальную скорость $u = \frac{1}{sin\theta}\sqrt{2gy}$ или $= \frac{a}{2cos\theta}\sqrt{\frac{2g}{atg\theta - b}}$ (§ 16).

Для примѣра положимъ, что орудіе находится на прежнемъ разстояніи 1050 футовъ, и что должно бросить ядро такъ, дабы оно пролетѣло чрезъ точку M, возвышенную на 30 футовъ отъ горизонта орудія и упало на валгангъ въ точкѣ M″, удаленной отъ боковаго бруствера на 12 саженъ или 84 фута. Поелику высота $M''P'' = 23$ фута, то въ семъ примѣрѣ будетъ.

$a = 1050$, $b = 30$, $a' = 1134$, $b' = 23$:

и по симъ даннымъ найдется $x = 669{,}766$ фута; $y = 44{,}267$ фута; уголъ возвышенія орудія $\theta = 7°31'48''$; уголъ паденія $\theta' = 5°14'$; скорость бросанія $u = 407$ футъ въ секунду.

Задача III.

§ 32. Зная горизонтальное разстояніе BP, и вертикальное возвышеніе MP точки M, чрезъ которую ядро должно пройти за брустверъ; также уголъ паденія ядра на валгангѣ и высоту M″P″: найти уголъ и скорость бросанія, также положеніе точки M″ паденіе ядра. Здѣсь данныя количества суть a, b, b' и θ', а искомыя a', θ, h, x и y. Уравненіе 4, въ которомъ одна только неизвѣстная величина a' находится, будучи рѣшено въ отношеніи къ сей неизвѣстной, даетъ

$$a' = \frac{a}{2}\frac{(atg\theta' - 2b')}{(atg\theta' - b)} + \sqrt{\frac{a^2}{4}\left(\frac{atg\theta' - 2b'}{atg\theta' - b}\right) + \frac{a^2 b'}{atg\theta' - b}}$$

или

$$a' = \frac{a}{2}\left\{\frac{atg\theta' - 2b' + \sqrt{a^2 tg^2\theta' - 4b'(b - b')}}{atg\theta' - b}\right\}.$$

Имѣя a', найдемъ потомъ уголъ мѣтанія θ посредствомъ уравненія $tg\theta = \frac{ba'^2 - b'a^2}{aa'(a' - a)}$ или уравненія $tg\theta = tg\theta' + \frac{2b'}{a'}$; и будемъ имѣть $x = \frac{ba'^2 - b'a^2}{2(ba' - ab')}$

или $= \frac{a'^2 tg\theta}{2(a'tg\theta - b')}$; величина h опредѣлится изъ уравненія $x = 2h\sin\theta.\cos\theta$, такъ что скорость

бросанія будетъ $u = \sqrt{\frac{gx}{sin\theta cos\theta}}$.

Для примѣра положимъ, что чрезъ точку M, возвышенную на 60 футовъ отъ горизонта орудія, должно пройти ядро и упасть на валгангъ, возвышенный на 54 фута, подъ угломъ въ 5°; при семъ разстояніе орудія до брустве-ра=1200 фут. Мы имѣемъ здѣсь a=1200, b=60, b'=54, θ'=5°; по подставленіи сихъ величинъ въ составленныя для сего случая уравненія, найдемъ a'=1275,08 фут. x=846 фут.; уголъ бросанія θ=9°46′; начальную скорость ядра u=390 футамъ въ секунду. Разстояніе a'=1275,08 фут. показываетъ, что ядро упадетъ на валгангъ подъ угломъ=5° на разстояніи 70 футовъ отъ боковаго брустве́ра.

Задача IV.

§ 33. Зная скорость ядра, высоту брустве́ра, чрезъ который должно перебросить ядро, высоту валганга, на который оно должно упасть, и уголъ паденія онаго на валгангѣ; опредѣлить уголъ возвышенія орудія и то разстояніе, на которомъ должно построить батарею.

При семъ вопросѣ извѣстны величины h, b, b' и θ', а неизвѣстны a', a, θ, x и y. Изъ урав-

нія 7-го будемъ имѣть для искомаго угла мѣтанія:

$$\cos\theta = \cos\theta' \sqrt{\frac{h - b'}{h}};$$

имѣя θ, найдемъ изъ уравненія 6-го

$$a' = \frac{2b'}{tg\theta - tg\theta'} = \frac{2b' \cos\theta . \cos\theta'}{\sin(\theta - \theta')},$$

что опредѣляетъ положеніе точки M″: послѣ сего уравненіе $x = 2h \sin\theta . \cos\theta$, даетъ разстояніе батареи до оси параболы; уравненіе $y = h\sin^2\theta$ покажетъ величину y; и наконецъ изъ уравненія $y = \frac{bx^2}{2ax - a^2}$ найдется требуемое разстояніе a отъ батареи до бруствера, которое будетъ $a = x + x\sqrt{\frac{y - b}{y}}$.

Для примѣра положимъ, что снарядъ, брошенный изъ точки B, со скоростію 400 футовъ въ одну секунду, долженъ быть перенесенъ чрезъ верхнюю точку M гребня бруствера, возвышенную на 60 футовъ, и упасть въ точкѣ M″ на валгангѣ, возвышенномъ на 54 фута; и пусть уголъ паденія будетъ $= 5°$. Слѣдовательно здѣсь мы имѣемъ $h = \frac{u^2}{2g} = \frac{(400)^2}{60}$

$=2666\frac{2}{3}$, $b=60$, $b'=54$, $\theta'=5°$; вставивъ сіи величины въ уравненія, составленныя для сего случая, будемъ имѣть по порядку: 1) $log\,cos\theta=log\left\{cos\theta'\sqrt{\frac{h-b'}{h}}\right\}=9{,}9939018$, что соотвѣтствуетъ углу возвышенія орудія $\theta=9°$ 34′45″; 2) $log a'=log\left\{\frac{2b'cos\theta.cos\theta'}{sin(\theta-\theta')}\right\}=3{,}1234684$, и $a'=1328{,}82$ фута; 3) $log\,x=log\,(2hsin\theta\,cos\theta)$ $=2{,}9420805$, и отсюда разстояніе батареи до оси параболы $x=875{,}146$ фут.; 4) $log\,y=log$ $(hsin^2\theta)=1{,}8683288$ и $y=73{,}85$ фут.; 5) наконецъ разстояніе, на которомъ нужно построить батарею, будетъ $a=x+x\sqrt{\frac{y-b}{y}}=1254{,}15$ фут., и разстояніе отъ боковаго бруствера до точки паденія $M''=a'-a=74{,}67$ фут.

Задача V.

34. Извѣстны, высота гребня бруствера $=b$, высота валганга $=b'$, уголъ паденія ядра на валгангѣ $=\theta'$ и разстояніе точки паденія отъ боковаго бруствера $=k$: найти уголъ и скорость бросанія, также и то разстояніе, на которомъ должно расположить батарею.

Поелику по заданію должно быть $a'-a=k$ или $a'=a+k$, то поставивъ сію величину въ уравненіе 4-е, потомъ уничтоживъ знаменателя и сокративъ, будемъ имѣть для опредѣленія разстоянія a отъ батареи до бруствера слѣдующее 2-й степени уравненіе.

$$(k\,tg\theta'+b'-b)a^2-\left\{2(b-b')-k\,tg\theta'\right\}ka=bk^2,$$

которое, будучи рѣшено, даетъ

$$a=\frac{k}{2}\left\{\frac{2b-(2b'+k\,tg\theta')\pm\sqrt{(2b'+k\,tg\theta')^2-4bb'}}{k\,tg\theta'+b'-b'}\right\},$$

и слѣдовательно

$$a'=a+k=\frac{k}{2}\left\{\frac{k\,tg\theta'\pm\sqrt{(2b'+k\,tg\theta')^2-4bb'}}{k\,tg\theta'+b'-b}\right\}$$

послѣ сего посредствомъ уравненія 6-го найдется уголъ бросанія θ, а изъ уравненія 7-го найдется величина $h=\frac{b'\cos^2\theta'}{\sin(\theta+\theta')\sin(\theta-\theta')}$, опредѣляющая начальную скорость бросанія $u=\cos\theta'\sqrt{\frac{2gb'}{\sin(\theta+\theta')\sin(\theta-\theta')}}$.

§ 35. Предъидущія вычисленія, равномѣрно принадлежатъ рикошетнымъ выстрѣламъ отлогимъ и крутымъ, и ясно показываютъ, какъ должно поступать при рѣшеніи иныхъ вопросовъ предложенныхъ по сему предмету при

какихъ либо данныхъ условіяхъ. Такъ на примѣръ, поелику существеннымъ условіемъ отлогихъ рикошетныхъ выстрѣловъ должно быть то, дабы ядро совершало вдоль всего валганга не высокое движеніе, то сіе условіе будетъ выполнено, когда ядро пролетѣвъ гребень бруствера весьма близко къ оному, падаетъ на валгангъ около его средины, то есть, между 20 и 30 саженями отъ боковаго брустверa: ибо тогда ядро быстро совершая низкій полетъ свой по всему протяженію валганга, можетъ встрѣтить всѣ предметы, на немъ расположенные. Уголъ возвышенія орудія, или пороховаго заряда, разстояніе отъ орудія до брустверa, служащія для произведенія сего дѣйствія, опредѣляется изъ задачъ 2-й и 5-й.

При всѣхъ задачахъ, касающихся до рикошетныхъ выстрѣловъ, какъ скоро опредѣленъ будетъ уголъ θ возвышенія орудія, величины a и b, опредѣляющія положеніе точки m будутъ извѣстны, то узнаемъ и высоту прицѣла помощію уравненій (q) и (s). Если чрезъ вычисленіе найдется, что сія высота менѣе самой высоты прицѣла, тогда по оному можно будетъ навести орудіе, имѣя прицѣльнымъ пред

метомъ верхъ бруствера; въ противномъ же случаѣ должно употребить квадрантъ для возвышенія орудія на надлежащее число градусовъ.

§ 36. Здѣсь надлежало бы показать дѣйствіе рикошета въ отношеніи къ углу отраженія, сравнивая его съ угломъ паденія, и опредѣлить ту скорость, которую ядро сохраняетъ послѣ каждаго рикошета: но кромѣ того, что изслѣдованіе сего рода не принесло бы важной пользы для практики, оно должно быть основано на предположеніяхъ произвольныхъ и всегда невѣрныхъ. Ибо при семъ надлежало бы знать: жесткое ли или упругое движущееся тѣло, и сколь велика его упругость? какова отражающая поверхность, или неупругая или упругая и въ какой степени?) Какая связь и сцѣпленіе между частицами земли, однородная ли она или разнородная? и проч. Всѣ сіи обстоятельства, какъ видно, подлежатъ многообразнымъ соединеніямъ, и могутъ перемѣнить уголъ и скорость отраженія до безконечности. Принявъ только одно обстоятельство въ соображеніе, мы не избѣгнемъ затрудненій при разысканіи точныхъ выводовъ; то какихъ должно ожидать

въ то время, допустивъ оныя всѣ. И такъ довольствуемся только замѣчаніемъ, что для способствованія ядру сдѣлать рикошетъ, уголъ паденія онаго долженъ быть весьма острый, не превышающій 8 или 10 градусовъ. Уголъ сей тѣмъ острѣе выходитъ, каковъ бы притомъ уголъ мѣтанія ни былъ, чѣмъ ближе точка паденія находится къ вершинѣ кривой описанной ядромъ; и вообще разность между угломъ мѣтанія и угломъ паденія увеличивается, по мѣрѣ большаго возвышенія точки паденія надъ горизонтомъ орудія, такъ что, когда избирается положеніе оси параболы, какъ въ задачѣ 1-й, то надлежитъ тѣмъ болѣе оную приблизить къ брустверу, чѣмъ онъ возвышеннѣе. Причина сего явствуетъ изъ уравненія $cos\theta' = cos\theta \sqrt{\frac{h}{h-b'}}$, поелику при томъ же углѣ θ и той же величинѣ h, съ увеличиваніемъ количества b' или высоты валганга, уголъ паденія θ' уменьшается.

Г Л А В А II.

О движеніи тяжелыхъ тѣлъ въ воздушномъ пространствѣ.

Недостатки Параболической Теоріи.

§ 37. Сопротивленіе воздуха на бросаемые снаряды, которое доселѣ не было принято въ разсужденіе, производитъ значительныя перемѣны въ выводахъ Теоріи, нами изложенной. Если снарядъ движется въ воздушномъ пространствѣ, то хотя бы онъ и тяжестію побуждаемъ не былъ, не можетъ пробѣжать равномѣрнымъ движеніемъ той прямой линіи, по которой брошенъ; ибо воздухъ противопоставляющій сопротивленіе движенію онаго, истребляетъ въ каждое мгновеніе часть его скорости. По сей самой причинѣ движеніе равномѣрно ускорительное, происходящее отъ тяжести, получаетъ также нѣкоторыя перемѣны: какъ то, 1) путь полета ядра не есть парабола; сія кривая можетъ произойти только отъ равномѣрнаго движенія, соединеннаго съ равномѣрноускорительнымъ движеніемъ. 2) При извѣстномъ углѣ возвышенія орудія и извѣстной силѣ бросанія, дальность выстрѣла всегда бываетъ

менѣе той, которая находится изъ выше предложенныхъ уравненій. 3) Самая возвышенная точка кривой, описанной снарядомъ, не соотвѣтствуетъ срединѣ горизонтальной дальности: она находится ближе къ точкѣ паденія, нежели къ точкѣ бросанія. 4) Уголъ паденія въ концѣ горизонтальной дальности всегда болѣе угла бросанія. 5) Наибольшая горизонтальная дальность полета происходитъ при углѣ возвышенія меньшемъ, нежели въ 45 градусовъ, и при томъ значительно меньшемъ, когда снарядъ бросается съ сильною скоростію. 6) Два угла, подъ которыми брошенный снарядъ попадаетъ въ тотъ же предметъ, находящійся на горизонтѣ батареи, не составляютъ взаимнаго дополненія къ 90 градусовъ; большій изъ нихъ различается менѣе отъ 45 градусовъ, нежели меньшій. 7) Наконецъ разности, о которыхъ здѣсь говоримъ, становятся болѣе значительными, чѣмъ брошенный снарядъ получаетъ большую скорость и чѣмъ поверхность онаго болѣе въ отношеніи къ его массѣ. Для опредѣленія оныхъ изслѣдуемъ сперва дѣйствіе сопротивленія жидкостей на тѣла.

Общія законы сопротивленія жидкостей.

§ 38. Поелику тѣло, движущееся въ покоющейся жидкости, въ каждое мгновеніе принуждено бываетъ раздвигать частицы оной и сообщать имъ движеніе, то необходимо скорость сего тѣла постепенно должна уменьшаться: ибо по свойству недѣятельности (инерціи) общей всѣмъ частямъ матеріи, частицы жидкости пріобрѣтаютъ движеніе не иначе, какъ убавивъ оное въ дѣйствующемъ на нихъ тѣлѣ, и сіе уменьшеніе бываетъ тѣмъ больше, чѣмъ онѣ терпятъ большую перемѣну и чѣмъ число оныхъ значительнѣе.

Сначала примемъ, что тѣло движется въ неупругой жидкости со скоростію v, и что передняя его поверхность, которою ударяетъ частицы жидкости, есть плоская и перпендикулярная къ направленію движенія; означимъ величину сей поверхности чрезъ A. Въ мгновеніе $= dt$, тѣло пройдетъ безконечно малое пространство $= vdt$ и сдвинетъ съ мѣста объемъ $Avdt$ жидкости: посему назвавъ D плотность сей жидкости, количество $ADvdt$ изобразитъ ея массу, которая приводится въ движеніе въ мгновеніе dt. Впрочемъ частицы жидкости ухо-

дятъ къ сторонамъ тѣла, и слѣдовательно не бываютъ побуждаемы впередъ и безпрестанно давимы, какъ принято при нашемъ изъясненіи; но предположеніе сіе хотя и несовершенно точное, однако ведетъ къ приближенію, на которомъ принуждены остановиться въ Теоріи весьма трудной и допускающей многія обстоятельства, коимъ нельзя дать постояннаго правила. И такъ означивъ чрезъ M массу тѣла; котораго поверхность A противополагается прямому удару жидкости, и чрезъ dv мгновенное уменьшеніе скорости, причиненное сопротивленіемъ сей жидкости, то количество движенія тѣла до удара будетъ $=Mv$, скорость его послѣ удара $=v-dv$, которая есть общая и частицамъ $ADvdt$ жидкости; и отсюда сумма количествъ движенія двухъ массъ послѣ удара будетъ $=(v-dv)\ (M+ADvdt)$. Но по началамъ Механики, сія сумма должна быть равна количеству движенія тѣла прежде удара, слѣдовательно получимъ уравненіе:

$$Mv=(v-dv)\ (M+ADvdt),$$

которое по надлежащемъ сокращеніи перемѣнится въ слѣдующее.

$$Mdv=ADv^2dt.$$

Изъ сего уравненія найдется величина простой

силы сопротивленія, или укосняющая сила

$$R = \frac{dv}{dt} = \frac{AD}{M} v^2,$$

и отсюда произведеніе $AR = ADv^2$ изобразитъ величину сопротивленія на тѣло, котораго масса = M и прямая поверхность, подверженная дѣйствію жидкости = A. Слѣдовательно сопротивленіе, ощущаемое тѣломъ со стороны одной и той же жидкости, пропорціонально квадрату скорости. Вообще оно пропорціонально плотности жидкости, умноженной на величину ударяемой плоскости и на квадратъ скорости.

Выраженіе $MR = AD\rho^2$, къ которому достигли при томъ предположенія, что тѣло движется, а жидкость находится въ покоѣ, равномѣрно имѣетъ мѣсто, допуская на оборотъ жидкость движущеюся съ скоростію ρ, а тѣло пребывающимъ въ покоѣ. Потому, что въ обоихъ случаяхъ передняя плоскость тѣла бываетъ поражаема частицами жидкости съ одинаковымъ усиліемъ.

§ 39. Когда жидкость въ косвенномъ направленіи встрѣчаетъ плоскую поверхность A, тогда сопротивленіе не измѣряется уже предъидущею величиною. Ибо если назовемъ α уголъ

ударенія жидкости и разложимъ косвенную скорость v на двѣ такія, изъ конхъ бы одна была нормальная къ ударяемой плоскости, а другая направленная по сей плоскости, то послѣдняя не произведетъ никакого сопротивленія, между тѣмъ какъ первая равная $v\sin\alpha$ окажетъ полное свое дѣйствіе. Слѣдовательно, поставивъ въ выраженіи прямаго сопротивленія вмѣсто v величину $v\sin\alpha$, получимъ сопротивленіе на косую плоскость

$$MR' = AD v^2 \sin^2 \alpha ;$$

и такъ при всѣхъ къ сопротивленію принадлежащихъ одинакихъ обстоятельствахъ, прямое сопротивленіе жидкости относится къ косвенному дѣйствующему на ту же поверхность, какъ квадратъ радіуса къ квадрату синуса ударенія.

Поелику косвенное сопротивленіе приводится къ силѣ, побуждающей тѣло по направленію CR (фиг. 10), перпендикулярному къ ударяемой поверхности AB и наклонному къ направленію движенія CD, то по сей причинѣ послѣдуетъ не только уменьшеніе скорости движущагося тѣла, но въ тоже время и уклоненіе онаго отъ направленія движенія. Ибо разложивъ сію силу

$=AD\rho^2 sin^2\alpha$ на двѣ такія, изъ коихъ бы одна прямо-противоположна была направленію движенія, а другая перпендикулярна къ сему направленію, найдется что первая $=AD\rho^2 sin^2\alpha$, а вторая $=AD\rho^2 sin^2\alpha.cos\alpha$; послѣдняя уменьшаетъ скорость поступательнаго движенія, а первая перемѣняетъ направленіе онаго. Отъ безпрерывно возобновляемой такой перемѣны въ направленіи движенія, тѣло, кромѣ уклоненія своего въ сторону съ надлежащаго пути, приметъ еще и вращательное движеніе.

§ 40. Когда разсматривается движеніе въ совершенно-упругой жидкости, то надобно удвоить выше найденныя величины сопротивленія. Дѣйствительно въ семъ случаѣ частицы жидкой м ссы $AD\rho dt$ отражаются отъ ударяющей плоскости и получаютъ скорость гораздо большую противъ остающейся скорости тѣла $\rho - d\rho$, и если назовемъ u сію неизвѣстную скорость, то подобно предъидущему, основываясь на равенствѣ между количествами движенія до удара и послѣ удара, будемъ имѣть

$$Md\rho = AD\rho dt.\ u.$$

Но при соудареніи совершенно упругихъ тѣлъ, также и живыя силы прежде и послѣ удара

должны быть равны, слѣдовательно получимъ еще уравненіе

$$Mv^2 = M(v - dv)^2 + ADvdt.\ u^2,$$

которое приводится къ

$$2Mvdv = ADvdt.\ u^2.$$

Сей выводъ, сравненный съ предъидущимъ даетъ $u = 2v$, и $Mdv = 2ADv^2 dt$, или

$$MR = 2ADv^2,$$

что и надлежало доказать.

Въ случаѣ же жидкости совершенно упругой, сопротивленіе заключаться будетъ между двойнымъ и одинакимъ сопротивленіемъ для неупругихъ жидкостей найденнымъ.

§ 41. Чтобы привести первую изъ найденныхъ величинъ сопротивленія къ извѣстнымъ мѣрамъ, то означивъ чрезъ h высоту соотвѣтствующую скорости v, будетъ имѣть $v^2 = 2gh$ и $MD = 2ARgh$. Но количество $2Ah$ выражаетъ объемъ призмы, которой основаніе A, а высота $2h$, посему $2DAh$ будетъ масса жидкой призмы, имѣющей основаніемъ ударяющую плоскость A, а высотою двойную ту высоту h, съ коей тяжелое тѣло должно упасть въ безвоздушномъ мѣстѣ для пріобрѣтенія скорости v движущагося тѣла, количество же $2ADgh$ изобразитъ

вѣсъ сей призмы. Въ совершенно упругихъ жидкостяхъ мѣрою сопротивленія должно принимать двойной вѣсъ той же призмы, то есть $MR=4ADgh$.

Всѣ почти ученые согласно принимаютъ въ своихъ вычисленіяхъ, что сопротивленіе жидкостей пропорціонально квадратамъ скоростей, касательно же совершенной величины онаго, то находятъ ее несовмѣстною съ выше найденными по Теоріи выводами для неупругихъ жидкостей, такъ что предъидущую Теорію можно употреблять только для одного сравненія сопротивленій, а для настоящаго измѣренія она недостаточна, потому что многія обстоятельства упущены въ ней, которыя однакожъ требуютъ великаго вниманія. Невтонъ былъ первый, который занимаясь изслѣдованіемъ движенія тѣлъ въ сопротивляющихся срединахъ нашелъ, что сопротивленіе воздуха при быстрыхъ движеніяхъ не должно быть пренебрегаемо, и что оно въ четверо меньше противу того, что даетъ теоретическій выводъ для сей жидкости; и вообще онъ заключилъ, что сопротивленіе жидкости, равно вѣсу столба оной, имѣющаго основаніемъ давимую плос-

кость, а высотою такое разстояніе, съ котораго тяжелое тѣло свободно падая въ безвоздушномъ пространствѣ пріобрѣтаетъ одинакую скорость съ движущимся тѣломъ. Сдѣланные имъ опыты достаточно подтвердили сіе заключеніе (Principes de math. livre II, sect. VII) Прежде его препятствіе отъ воздуха въ движеніи тѣлъ почиталось ничтожнымъ, и казалось что воздухъ, котораго плотность есть въ нѣсколько тысячъ разъ менѣе плотности бросаемыхъ изъ орудій тяжелыхъ тѣлъ, не можетъ чувствительно перемѣнить параболическаго движенія, которое по сей причинѣ и было упорно защищаемо многими артиллерійскими писателями, а въ особенности Блонделемъ, Белидоромъ и Галлеемъ.

§ 42. Слѣдуя опытамъ Боссю, кавалера Борда и Гютона, находимъ Теорію Невтона не совсѣмъ вѣрною въ практикѣ; и въ особенности при весьма быстрыхъ движеніяхъ величина сопротивленія, опредѣляемая вѣсомъ жидкой призмы, у коей основаніе есть давимая плоскость, а высота равна той высотѣ, съ которой должно упасть тяжелое тѣло, дабы пріобрѣсть скорость движущейся плоскости, многимъ менѣе истинной величины. А потому положимъ,

что неопредѣленная высота жидкой призмы, которой вѣсомъ измѣряется сопротивленіе, относится къ высотѣ $2h = \lambda : 1$, гдѣ количество λ означаетъ такое число, которое предоставляется опредѣлить опытомъ: сія высота будетъ равна $2\lambda h$, а вѣсъ жидкой призмы $= 2\lambda A D g h$. Слѣдовательно сопротивленіе на плоскую поверхность изобразится формулою.

$MR = 2\lambda AD g h$ или $MR = \lambda A D v^2$.... (t), ибо $v^2 = 2gh$.

Въ случаѣ плоскости, наклоненной къ направленію движенія будемъ имѣть сопротивленіе: $MR' = 2\lambda AD g h \sin^2 \alpha$ или $MR' = \lambda AD v^2 \sin^2 \alpha$... (u).

По изслѣдованіямъ Невтона косфориціентъ $\lambda = \frac{1}{2}$ какъ для неупругихъ, такъ и упругихъ жидкостей.

§ 43. Многія причины, коимъ нельзя дать постояннаго правила, различно измѣняютъ найденное въ § 38 количество сопротивленія. Мы представимъ здѣсь главнѣйшія изъ нихъ:

1) Поелику каждая частица жидкости, ударяемая тѣломъ, приводитъ въ движеніе въ тоже самое время великое множество другихъ частицъ, окружающихъ оную, сіи же послѣднія сообщаютъ движеніе по разнымъ направленіямъ

и прочимъ частицамъ, съ ними соприкосновеннымъ, и т. д., то изъ сего ясно видно, что нѣкоторая часть жидкости будетъ совращена съ направленія перпендикулярнаго удара и встрѣтитъ плоскость въ косвенномъ направленіи, или совсѣмъ не доходя до плоскости уклонится въ стороны тѣла и не окажетъ на него надлежащаго дѣйствія. Сіе разнообразное движеніе частицъ, отличное отъ предположеннаго нами въ § 38, должно ощутительно перемѣнить количество сопротивленія, опредѣляемаго формулою $MR = AD v^2$. Но гдѣ должно начинаться совращеніе частицъ? на какое разстояніе онѣ совращаются, и ускоряется ли движеніе ихъ по сторонамъ тѣла? по какому закону ускоряется сіе движеніе? и проч... Все это намъ неизвѣстно.

2) При большемъ протяженіи плоскости, частицы жидкости встрѣчаютъ болѣе препятствій для уклоненія своего въ стороны тѣла; такъ что дѣйствительное сопротивленіе противъ плоскостей разной величины, вмѣсто того, чтобы быть пропорціональнымъ протяженію ихъ, находится нѣсколько въ большемъ отношеніи, чѣмъ отношеніе плоскостей. Послѣд-

нее отношеніе имѣло бы мѣсто тогда, когда бы каждый слой жидкости, послѣ сообщеннаго ему удара движущеюся плоскостію, тотчасъ отъ нея былъ отдѣленъ и не препятствовалъ непосредственному дѣйствію на слѣдующій слой, ибо тогда сопротивленіе пропорціонально было бы числу частицъ, поражаемыхъ въ одно время. Но таковое предположеніе, какъ замѣчено выше, допущено быть не можетъ.

Опыты, произведенные кавалеромъ Борда совершенно подтвердили непропорціональность сопротивленій плоскостямъ различной величины. По его изслѣдованіямъ, квадратная плоскость, имѣющая въ сторонѣ 4 Парижскихъ дюйма и движущаяся со скоростію 25,47 Парижскихъ фута въ секунду выдерживаетъ отъ воздуха сопротивленіе равное вѣсу воздушнаго столба, у котораго основаніе есть сія плоскость, а высота=16,1 фута, вмѣсто 10,74 фута высоты, соотвѣтствующей скорости 25,47 фута; квадратная же плоскость, имѣющая въ сторонѣ 6 Парижскихъ дюймовъ и побуждаемая съ такою же скоростію испытываетъ сопротивленіе равное вѣсу воздушнаго столба, у котораго основаніе есть сія плоскость, а высота =17,6

фут.; и для квадратной плоскости, коей сторона=9 дюймамъ, при той же скорости, высота воздушнаго столба измѣряющаго сопротивленіе, равна 19,1 фута. Изъ сего заключаемъ, что сопротивленіе воздуха на плоскія поверхности увеличивается въ отношеніи большемъ, чѣмъ отношеніе самыхъ поверхностей; ибо найденныя здѣсь сопротивленія на три квадратныя плоскости не относятся просто, какъ числа 16 : 36: 81 изображающія ихъ площади, но какъ 16. 16, 1 : 36. 17, 6 : 81. 19, 1. Сверхъ того по опытамъ сего испытателя оказалось также, что плоскія поверхности одинакой величины, но разнаго вида, подвержены бываютъ не равнымъ сопротивленіямъ, и что сіи сопротивленія на круговыя плоскости получаются меньшими. Въ самомъ дѣлѣ кругъ, имѣя въ діаметрѣ $4\frac{1}{2}$ Парижскихъ дюйма, и различаясь весьма мало отъ квадрата, коего сторона равна 4-мъ дюймамъ, при скорости 12,9 фута въ одну секунду претерпѣваетъ сопротивленіе = 0,03613 Парижскихъ фута, между тѣмъ квадратъ при такой же скорости претерпѣваетъ сопротивленіе=0,0383 Парижскихъ фута. И такъ не возможно составить общаго правила для опредѣ-

ленія сопротивленія жидкостей на прямыя поверхности; скорость движенія, величина и видъ ихъ, также большая или меньшая плотность жидкости, разнообразно измѣняютъ сіе сопротивленіе. Опытами дознано, что въ тонкихъ и упругихъ жидкостяхъ сопротивленіе оказывается немного меньшимъ, нежели какъ бы по отношенію плотностей слѣдовало.

3) Мы нашли по Теоріи, что сопротивленія жидкости при косвенныхъ движеніяхъ и при равныхъ прочихъ обстоятельствахъ уменьшаются въ отношеніи квадратовъ синусовъ угловъ ударенія. Но какъ правило сіе выведено было изъ того предположенія, что сопротивленіе производится единообразно во всѣхъ точкахъ ударяемой плоскости, и что оно зависитъ отъ числа частицъ, встрѣчаемыхъ ею въ каждое мгновеніе, чего однако въ самомъ дѣлѣ не бываетъ, ибо частицы жидкости въ сторонѣ острого угла, составляемаго плоскостію съ направленіемъ движенія, находятъ болѣе препятствія для свободнаго своего уклоненія, нежели въ сторонѣ тупаго, то по сей причинѣ изъ многихъ опытовъ и найдено, что сопротивленія, по обыкновенному правилу вычисляемыя, всегда быва-

ютъ меньше дѣйствительныхъ, и что онѣ тогда только довольно близко подходятъ къ истиннымъ, когда углы удареніи не менѣе 60 град.

4) Мы видѣли въ § 38, что сопротивленіе, встрѣчаемое тѣломъ со стороны одной и той же жидкости, пропорціонально квадрату скорости. Опыты удостовѣряютъ, что сей законъ менѣе отступаетъ отъ истины, нежели предшествующіе. Если же онъ погрѣшаетъ, то не въ иномъ какомъ либо отношеніи, какъ употребляя его для сравненія дѣйствій сопротивленія между скоростями весьма много различающимися, то есть: между скоростію тихаго движенія и между скоростію чрезвычайно быстраго движенія; и находимъ для послѣдняго сопротивленіе слишкомъ малое, если оно выводится посему правилу изъ сопротивленія противополагаемаго жидкостію медленно движущемуся тѣлу. Впрочемъ все сіе зависитъ еще отъ свойства жидкости: если она упругая, то выводы тѣмъ ближе подойдутъ къ истиннымъ, чѣмъ упругость значительнѣе; ибо, по мѣрѣ большей степени упругости, частицы жидкости скорѣе усиливаются возстановить между собою равновѣсіе, разстроенное ударомъ,

и удобнѣе текутъ къ задней сторонѣ движущагося тѣла. Но при семъ входятъ въ разсмотрѣніе слѣдующія два обстолтельства; 1-е поелику упругая жидкость есть также и сжимаемая, то можетъ случиться при очень быстрыхъ движеніяхъ, что частицы оной, не успѣвъ уйти къ сторонамъ тѣла, сгустятся на передней части его, и чрезъ то увеличатъ плотность, а слѣдовательно и сопротивленіе жидкости; 2-е скорость движенія можетъ быть столь велика что жидкость въ тоже мгновеніе не поспѣетъ слѣдовать за движущимся тѣломъ и наполнить пустаго пространства имъ оставляемаго: явно, что въ такомъ случаѣ, если жидкость есть воздухъ, кромѣ увеличиванія сопротивленія, причиняемаго большею плотностію, тѣло должно еще преодолѣвать все давленіе атмосферы. Скорость, потребная для произведенія сего дѣйствія покрайней мѣрѣ должна быть болѣе 1300 Англійскихъ футовъ въ секунду; ибо предположивъ среднее давленіе атмосферы равномѣрное вѣсу ртутнаго столба въ 30 Англійскихъ дюймовъ высоты или вѣсу водянаго столба въ 33,965 Англійс. фута высоты, и воду въ $833\frac{1}{3}$ раза тяжелѣе воздуха, то высота атмосферы

по всюду столь же плотной, какъ и на поверхности земли, равна будетъ $33{,}965 \times 833\frac{1}{3} =$ 28304,2 фута. Но воздухъ, подобно всякой тяжелой жидкости, истекающей изъ сосуда малымъ отверстіемъ, бросается въ пустое пространство со скоростію, которую бы тяжелое тѣло пріобрѣло, падая съ сей высоты, слѣдовательно, при среднемъ давленіи атмосферы, таковая скорость составлять будетъ около 1350 Англійскихъ футовъ въ секунду. Вообще зависимо отъ различнаго состоянія воздуха, какъ то его давленія и температуры, она измѣняться можетъ отъ 1300 до 1400 футовъ. И такъ, если скорость движущагося тѣла будетъ равна, или болѣе той, съ которою воздухъ стремится замѣстить пустое пространство, тогда не одно сопротивленіе, но и давленіе атмосферы замедляетъ движеніе онаго, и очевидно, что въ случаѣ меньшей скорости тѣло должно преодолѣвать часть сего давленія. Сіе количество, выражающееся разностію между давленіями жидкости на переднюю и заднюю стороны, движущагося тѣла пропадаетъ, когда плотность жидкости единообразна кругомъ тѣла. Но сіе имѣетъ мѣсто въ случаѣ медленнаго лишь движе-

нія, или когда упругость жидкости столь велика, что равновѣсіе нарушенное ударомъ тѣла тотчасъ возстановляется между частицами оной. Въ такомъ только случаѣ можно въ точности допустить законъ сопротивленія пропорціональнаго квадратамъ скоростей. Во всякомъ же иномъ случаѣ, плотность жидкости на передней части движущагося тѣла измѣняется вмѣстѣ со скоростію его, и слѣдовательно тѣло должно проходить какъ будто бы средину неодинакой плотности; но такое предположеніе отвергаетъ единообразную плотность, для коей выведено правило сопротивленія пропорціональнаго квадратамъ скоростей, и проч. Мы не думаемъ останавливаться болѣе на семъ предметѣ, о которомъ дальнѣйшія изслѣдованія открыли бы новыя еще затрудненія; а довольствуемся замѣчаніемъ, что для начертанія полной и достаточной Теоріи о сопротивленіи жидкостей, необходимо нужно принять въ разсмотрѣніе всѣ обстоятельства въ предъидущихъ параграфахъ упоминаемыя; какъ единственное средство для полученія общаго закона, изъ котораго можно было бы вывесть всѣ частные случаи, и для составленія Формулы сопротив-

ленія, прилагаемой ко всѣмъ степенямъ скорости тѣла, и ко всѣмъ степенямъ плотности и упругости жидкости.

§ 44. Изъ того начала, что сопротивленіе жидкости на плоскость, наклоненную къ направленію движенія, пропорціонально квадрату синуса угла паденія, легко вывесть сопротивленіе на какія либо кривыя поверхности. Но мы исключительно здѣсь разсмотримъ тѣла вращенія, движущіяся по направленію своей оси, потому что поверхность таковыхъ тѣлъ со всѣхъ сторонъ единообразна и симметрически расположена противъ дѣйствія жидкости, слѣдственно боковыя силы, перпендикулярныя къ направленію движенія, взаимно уничтожаются, и сопротивленіе жидкости отнюдь не перемѣняетъ направленія движенія, но только одну скорость оныхъ. И такъ положимъ, что ADB (фиг. 11) будетъ кривая, производящая тѣло вращенія, на которое должно сыскать сопротивленіе: при чемъ ось вращенія AB составляетъ направленіе движенія. Если ADB полукругъ, то явно, что тѣло вращенія будетъ шаръ, но для общаго исчисленія мы представляемъ чрезъ ADB, какую ни есть кривую.

Между прочимъ не безполезно знать ту часть поверхности, которая поражается частицами жидкости, и отличить оную отъ остальной части тѣла: сія часть, на которую жидкость оказываетъ свое усиліе, происходитъ отъ обращенія дуги кривой AMD, простирающейся отъ точки A до D, гдѣ кривая начинаетъ склоняться къ оси и гдѣ касательная параллельна сей оси. Примемъ теперь ось вращенія за ось абсциссъ, и означимъ координаты AP и PM точки M относительно чрезъ x и y, при чемъ проведемъ ординату mp, безконечно близкую къ MP; то будетъ $Pp = dx$, $mn = dy$ и $Mm = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Сей елементъ Mm дуги при обращеніи около оси AB произведетъ поясъ, коего поверхность $= 2\pi y ds$; здѣсь количество π означаетъ отношеніе окружности къ діаметру круга. А какъ всѣ части сего пояса поражаются частицами жидкости подъ одинаковымъ угломъ mMn, коего синусъ $= \frac{dy}{ds}$, а косинусъ $= \frac{dx}{ds}$, по сему означивъ скорость движущагося тѣла чрезъ v, массу его чрезъ M, плотность жидкости чрезъ D, и поставивъ въ выраженіе

(u) величину $2\pi y ds$ вмѣсто A и $\frac{dy}{ds}$ вмѣсто $sin\alpha$ найдется сопротивленіе, выдерживаемое поясомъ по прямой MC нормальной къ Mm, равнымъ $\lambda D v^2 \; 2\pi y ds. \; \frac{dy^2}{ds^2} = 2\pi\lambda D v^2 \frac{y dy^2}{ds}$, и отсюда сопротивленіе по направленію движенія CE равнымъ $2\pi\lambda D v^2 \frac{y dy^2}{ds} cos ECR = 2\pi\lambda D v^2 \, y \frac{dy^2}{ds} \; sin \; mMn = 2\pi\lambda dv^2 \frac{y dy^3}{ds}$ интегралъ послѣдняго выраженія, то есть $2\pi\lambda D v^2 \int y \frac{dy^3}{ds^2}$, изобразитъ сопротивленіе претерпѣваемое поверхностію, произведенною обращеніемъ дуги AM; а распространивъ сей интегралъ до предѣла D, будемъ имѣть сопротивленіе MR, которое жидкость противополагаетъ движенію тѣла.

§ 45. Сдѣлаемъ примѣненіе сей формулы къ шару, какъ такому тѣлу, которое болѣе всѣхъ другихъ употребительно въ Артиллеріи. Означивъ радіусъ онаго чрезъ r, будетъ уравненіе производящаго круга, отнесенное къ концу діаметра $y^2 = 2rx - x^2$. Взявъ дифференціалъ, найдется $y dy = (r - x) dx$; но $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{r dx}{r}$,

слѣдовательно будемъ имѣть $\frac{dy}{ds} = \frac{r-x}{r}$, и

$$\frac{ydy^3}{ds^3} = ydy\ \frac{dy^2}{ds^2} = \frac{(r-x)^3 dx}{r^2};$$

отсюда

$$\int \frac{ydy^3}{ds^2} = -\frac{(r-x)^4}{4r^2} + c.$$

Но при положеніи $x = o$, интегралъ сей долженъ быть равенъ нулю, слѣдовательно постоянная $c = \frac{1}{4}r^2$, и

$$\int \frac{ydy^3}{ds^2} = \frac{1}{4}r^2 - \frac{(r-x)^4}{4r^2}$$

Симъ образомъ искомое сопротивленіе на неопредѣленный сегментъ MAM′ будетъ

$$MR = 2\pi\lambda D v^2 \int \frac{ydy^2}{ds} = 2\pi\lambda D v^2 \left\{ \frac{1}{4}r^2 - \frac{(r-x)}{4r^2} \cdot \right\}$$

А дабы получить сопротивленіе на переднюю половину шара или на цѣлый шаръ, что все равно, должно въ найденномъ интегралѣ сдѣлать $x = r$, и будетъ тогда $MR = \frac{1}{2}\pi\lambda D v^2 r^2$.

Но перпендикулярное сопротивленіе, которому подвергается большой кругъ шара, равно $\pi\lambda D v^2 r^2$, потому что площадь сего круга $= \pi r^2$; то изъ сего заключаемъ, что сопротивленіе встрѣчаемое шаромъ въ половину меньше со-

противленія, встрѣчаемаго цилиндромъ движущимся съ такою же скоростію, какъ и шаръ, по направленію своей оси, и имѣющимъ равную съ нимъ массу и тотъ же въ основаніи діаметръ. Сдѣлавъ, какъ прежде, $v^2 = 2gh$, будемъ имѣть касательно шара

$$MR = \tfrac{1}{2}\pi\lambda D v^2 r^2 = \pi\lambda D g h r^2 \ldots\ldots (v)$$

и касательно цилиндра, котораго основаніе есть большой кругъ шара, $MR' = \pi\lambda D v^2 r^2 = 2\pi\lambda D g h r^2$

Укосняющая сила, или сила сопротивленія, отнесенная къ единицѣ массы шара будетъ

$$R = \frac{\pi\lambda D g h r^2}{M}, \text{ или } R = \frac{\pi\lambda D v^2 r^2}{2M}.$$

По Невтонову положенію $\lambda = \frac{1}{2}$ и сопротивленіе на шаръ равно $\frac{1}{2}\pi D g h r^2$, то есть равно вѣсу жидкаго цилиндра, имѣющаго основаніемъ большой кругъ шара, а высотою половину той высоты, съ которой тѣло въ безвоздушномъ мѣстѣ упасть должно, дабы пріобрѣсть скорость шара.

§ 46. Пусть будетъ для 2-го примѣра прямой конусъ ABC (фиг. 12), движущійся по направленію своей оси AD. Чтобы опредѣлить сопротивленіе на круглую его поверхность, то взявъ вершину A за начало координатъ и сдѣ-

лавъ AD$=h$, BD$=r$, AB$=l=\sqrt{r^2+h^2}$, надлежитъ въ общую формулу $2\pi\lambda Dv^2 \int \frac{ydy^3}{ds^2}$ (§ 43) поставить $y=\frac{rx}{h}$, $dy=\frac{rdx}{h}$ и $ds=\frac{ldx}{h}$, которая обратится въ $2\pi\lambda Dv^2 \int \frac{r^4}{h^2l^2} xdx=2\pi\lambda Dv^2 \frac{r^4x^2}{2h^2l^2}+C$; здѣсь C означаетъ постоянную придаваемую къ интегралу. Распространивъ величину его на всю боковую поверхность конуса отъ $x=o$, до $x=h$, получимъ искомое сопротивленіе на сей конусъ $\pi\lambda Dv^2\frac{r^4}{l^2}$, которое относится къ сопротивленію $\pi\lambda Dv^2r^2$, встрѣчаемому его основаніемъ, какъ квадратъ радіуса основанія къ квадрату бока конуса.

Въ случаѣ конуса DAD′ (Фиг. 11) вписаннаго въ полушарѣ DMAM′D′ и движущагося какъ и шаръ по направленію оси CA, будетъ $h=r$, $l^2=2r^2$ и слѣдовательно сопротивленіе на конусъ$=\frac{1}{2}\pi\lambda Dv^2r^2$, то есть равное сопротивленію на шаръ.

§ 47. Гютонъ изъ опытовъ своихъ, при помощи *баллистическаго отвѣса* и *вращательной машины* Робинса, извлекъ касательно сопро-

тивленія воздуха на тѣла слѣдующія правила (*).

1) При равныхъ скоростяхъ сопротивленія относятся почти, какъ поверхности тѣлъ подобнаго вида, и нѣсколько въ большемъ отношеніи при большихъ поверхностяхъ. По опытамъ оказалось, что при скоростяхъ простирающихся отъ 300 до 2000 футовъ въ секунду, сопротивленія на три ядра, имѣющія въ діаметрѣ одно два дюйма, 2-е 2,78 дюйма и 3-е 3,55 дюйма, находятся въ большемъ отношеніи противу поверхностей ихъ; однакоже разность между отношеніемъ сопротивленій и отношеніемъ поверхностей или квадратовъ діаметровъ, такъ малозначительна, что въ большей части вычисленіяхъ, относящихся къ Артиллеріи и къ другимъ практическимъ занятіямъ, вообще оба сіи отношенія можно почитать равными.

2) Сопротивленіе на одну и ту же поверхность тѣла при различныхъ скоростяхъ въ движеніяхъ медленныхъ, почти пропорціонально квадрату скорости, увеличиваясь однако же не много болѣе противу сего отношенія при постепенномъ возрастаніи скорости.

(*) Nouvelles experiences d'artillerie par Charles Hutton traduit de l'anglais par O. Terquem. Seconde partie 1826.

3) Круглыя и угловатыя поверхности тѣлъ, подвержены меньшему сопротивленію, нежели плоскія поверхности равнаго діаметра. Не должно однако же изъ того заключить, что чѣмъ острѣе поверхность, тѣмъ меньшему она подвержена сопротивленію, ибо выпуклая поверхность полушара встрѣчаетъ меньшее сопротивленіе, нежели остроконечная поверхность вписаннаго въ немъ конуса.

4) Когда задніи части движущихся тѣлъ имѣютъ различные виды, то и сопротивленія различны, хотя бы переднія части оныхъ были совершенно подобны и равны; что происходитъ безъ сомнѣнія отъ различныхъ давленій воздуха на задніи части. Такъ напримѣръ, переднее основаніе движущагося въ воздухѣ цилиндра встрѣчаетъ меньшее сопротивленіе, нежели совершенно равныя основанія конуса и полушара; основаніе полушара встрѣчаетъ меньшее сопротивленіе, нежели равное основаніе конуса; выпуклая поверхность полушара встрѣчаетъ меньшее сопротивленіе, нежели цѣлый шаръ, имѣющій съ онымъ одинакій радіусъ; и проч.

5) Сопротивленіе на основаніе полушара от-

носится къ сопротивленію на выпуклую его поверхность или на шаръ, почти какъ $2\frac{2}{5} : 1$, вмѣсто отношенія $2 : 1$ доставляемаго Теоріею (§ 45). Сопротивленіе на основаніе конуса, котораго высота равна діаметру основанія, относится къ сопротивленію на выпуклую его поверхность почти $= 2{,}3 : 1$, что равно простому отношенію между бокомъ и радіусомъ основанія, вмѣсто квадратнаго отношенія доставляемаго Теоріею (§ 46).

§ 48. Слѣдующая таблица составленная Гютономъ показываетъ, при различныхъ скоростяхъ простирающихся отъ 5 до 200 футовъ въ секунду, 1) соотвѣтственныя сопротивленія воздуха на ядро въ 2 дюйма въ діаметрѣ, найденныя по опытамъ и выраженныя въ унціяхъ Англійскаго вѣса *avoir du poids*; 2) сопротивленія на то же ядро, вычисленныя по обыкновенной Теоріи предложенной Невтономъ, или по формулѣ (v) $\pi\lambda D g \frac{r^2 v^2}{2g}$, которая по поставленіи численныхъ величинъ $\lambda = \frac{1}{2}$, $\pi = 3{,}1416$, $Dg = 1\frac{1}{10}$ унціи $=$ удѣльному вѣсу воздуха, $v = 1$ дюйму $= \frac{1}{12}$ фута, $g = 16$ футамъ, приводится къ $\frac{1}{4888} v^2$ или $\frac{(3v)^2}{44000}$; 3) перемѣнныя ве-

личины коеффиціента λ, опредѣляющія отношеніе между высотою воздушнаго столба, давленіемъ коего измѣряется сопротивленіе, и между высотою соотвѣтствующею скорости ядра; 4) степени скорости, соотвѣтствующія истиннымъ сопротивленіямъ; онѣ находятся, сравнивая сопротивленіе найденное по опытамъ и принадлежащее скорости 100 футовъ, съ каждымъ изъ послѣдующихъ сопротивленій, принадлежащихъ скоростямъ 200,300,400 и проч футовъ; 5) истинныя сопротивленія, найденныя по опытамъ и выраженныя въ фунтахъ Англійскаго торговаго вѣса *avoir du poids* и 6) сіи же сопротивленія въ Русскихъ фунтахъ выраженныя (*).

(*) 1 Англійскій торговый фунтъ avoir du poids=1,1085 Русск. фунта=106,396 золот.

Скорости въ секунду.	Сопротивленія по опытамъ найденныя.	Сопротивленія по Теоріи вычисленныя.	Величины коэффиціента. λ.	Степени скорости соотвѣтствующія истиннымъ сопротивленіямъ.	Сопротивленія по опытамъ найденныя и выраженныя въ фунтахъ (avoir du poids).	Сопротивленія по опытамъ найденныя и въ Русскихъ фунтахъ выраженныя.
Футы	Унціи	Унціи				
5...	0,006..	0,005...	0,60...			
10...	0,026...	0,021...	0,61..			
15...	0,058..	0,046..	0,62...			
20...	0,103...	0,082..	0,65..			
25...	0,163...	0,128.	0,63.			
30...	0,237...	0,184...	0,64...			
40...	0,427...	0,329...	0,65..			
50..	0,676...	0,511...	0,66 ..			
100...	2,78...	2,046...	0,68..		0,174...	0,193..
200...	11,54..	8,18...	0,69..	2,028...	0,709..	0,786..
300.	25,8 ..	18,4...	0,71...	2,028...	1,612...	1,787...
400..	46,5...	32,7...	0,72..	2,032...	2,906...	3,221...
500...	74,4...	51,2...	0,73 ..	2,042..	4,650...	5,154...
600...	110,4...	75,6...	0,75 ..	2,055...	6,900..	7,647...
700...	156,0...	100,2 ..	0,78...	2,069 ..	9 750...	10,806...
800...	212,0...	130,9...	0,81...	2,084...	13,250...	14,685...
900...	280,3..	165,7...	0,84...	2,099...	17,519...	19,416...
1000.	362,1..	204,6...	0,88..	2.115...	22,625..	25,075...
1100...	456,9 ..	247,6...	0,92...	2,128...	28,556...	31,649...
1200 ..	564,4...	294,6...	0,96...	2,138...	35,275...	39,095...
1300 ..	685,5...	345,7...	0,99 ..	2,146...	42,706...	47,331..
1400...	811,5 ..	401,0...	1,01..	2,151...	50,719...	56,212...
1500...	947,1..	460,1...	1,03...	2,155 ..	59,194...	65,695...
1600 ..	1086,9...	525,7...	1,04...	2,152...	67,931...	75,288..
1700...	1228,4...	591,2 ..	1,05...	2,150...	76,775...	85,090...
1800...	1368,6...	662,8...	1,02...	2,145...	85,537...	94,804..
1900..	1505,7...	738,5...	1,01..,	2,141...	94,106...	104,298...
2000 ..	1657,8...	818,5..	1,00...	2,136 ..	102,362...	113,448...

Изъ сей таблицы видно, что въ началѣ при весьма малыхъ скоростяхъ коеффиціентъ сопротивленія λ не много болѣе $\frac{3}{5}$; съ возраста-

ніемъ же скорости постепенно увеличивается, но только дотолѣ, пока скорость равна будетъ 160 футовъ въ секунду. Тогда пустота позади движущагося ядра, образовавшаяся совершенная (§ 43. чл. 4), и коеффиціентъ дѣлается наибольшимъ и равнымъ 1,04. Послѣ того коеффиціентъ сей постепенно убываетъ и дѣлается равнымъ 1-цѣ при скорости 2000 футовъ въ секунду. То же самое имѣетъ мѣсто и въ отношеніи къ показателямъ степеней сопротивленія, наибольшій изъ нихъ соотвѣтствуетъ скорости въ 1500 футовъ и равенъ 2,153 или почти $=2\frac{2}{13}$; среднее между ими ариѳметическое число равно 2,104 или почти $=2\frac{1}{10}$. Вотъ способъ опредѣлять по порядку сихъ показателей: означивъ данныя двѣ скорости чрезъ v и v', соотвѣтствующія сопротивленія чрезъ s и s', и неизвѣстнаго показателя степеней отъ v и v', пропорціональныхъ симъ сопротивленіямъ чрезъ x, будемъ имѣть $v^x : v'^x = s : s'$ или $\left(\frac{v'}{v}\right)^x = \frac{s}{s'}$; отсюда по взятіи логарифма, получимъ $x \log\left(\frac{v'}{v}\right) = \log\left(\frac{s'}{s}\right)$ и

$$x = \frac{log S' - log S}{log\left(\frac{v'}{v}\right)}.$$

Дабы приложить сію формулу къ выводамъ заключающимся въ предьидущей таблицѣ, то начавъ со скорости 100 футовъ $= v$ и соотвѣтственнаго сопротивленія $2{,}78 = s$, будемъ имѣть, для слѣдующихъ по порядку взятыхъ скоростей, частное $\frac{v'}{v} = 2$, 3, 4 и проч. и $s' = 11$, 34; 25, 8; и проч.

§ 49. Зная изъ таблицы сопротивленіе воздуха на ядро въ 2 дюйма въ діаметрѣ, движущееся съ извѣстною скоростію, можно будетъ опредѣлить сопротивленіе на другое какое либо ядро, движущееся съ такою же скоростію. Ибо какъ сопротивленія при равныхъ скоростяхъ относятся какъ поверхности ядеръ (§ 47), или какъ квадраты ихъ діаметровъ, то означивъ чрезъ k діаметръ даннаго ядра, чрезъ s сопротивленіе встрѣчаемое ядромъ въ 2 дюйма въ діаметрѣ и соотвѣтствующее опредѣленной скорости, найдется по пропорціи $4 : k^2 = s : \frac{1}{4}k^2 s$ сопротивленіе, соотвѣтствующее той же самой скорости и претерпѣваемое ядромъ, коего діаметръ $= k$ дюймамъ, равное $\frac{1}{4}\ k^2 s$. Напримѣръ,

дабы найти сопротивленіе на 24-хъ фунтовое ядро, брошенное со скоростію 2000 футовъ въ секунду, надлежитъ въ послѣднее выраженіе поставить діаметръ сего ядра $k=5{,}797$, дюйма, и $s=113{,}448$ фунта=сопротивленію, которое встрѣчаетъ ядро въ 2 дюйма въ діаметрѣ при скорости 2000 футовъ; и будетъ искомое сопротивленіе $=\frac{1}{4}(5{,}7972)^2\ 113{,}448=953$ фунтамъ.

§ 50. Мы замѣтили въ § 43 чл. 4, что ядро претерпѣваетъ два различныя сопротивленія: одно происходитъ собственно отъ недѣятельности (инерціи) частицъ воздуха, коимъ брошенное ядро безпрестанно передаетъ часть количества своего движенія, и ясно видно, что въ семъ отношеніи разсматриваемое сопротивленіе, должно измѣняться пропорціонально квадратамъ скоростей; другое же происходитъ отъ неравнаго давленія атмосферы на переднюю и заднюю стороны движущагося ядра и увеличивается постепенно и правильно по мѣрѣ того, какъ скорость возрастаетъ, увѣличивается однако же дотолѣ, пока скорость будетъ равна или больше той, съ которою воздухъ низвергается въ пустоту, и тогда для всѣхъ высшихъ скоростей становится уже оно постояннымъ. Сіи

обстоятельства ясно показываютъ, почему сопротивленія выведенныя изъ опытовъ безпрерывно возрастаютъ гораздо въ большемъ отношеніи, чѣмъ отношеніе квадратовъ скоростей, до извѣстнаго только предѣла, и почему нѣтъ никакой степени скорости съ показателемъ цѣлымъ и никакого одночленнаго выраженія, которое было бы пропорціонально сопротивленіямъ. Правда, что одночленное количество $\frac{v^{2,1}}{5700}$ опредѣляетъ довольно точно всѣ сопротивленія, но по причинѣ дробнаго показателя 2,1 сія формула неудобоприлагаема къ изчисленіямъ, необходимо заключающимъ въ себѣ выраженія дифференціаловъ и интеграловъ.

И такъ надлежитъ прибѣгнуть къ двучленному выраженію или къ формулѣ $mv^2 + nv = s$, содержащей двѣ цѣлыя степени скорости 1-ю и 2-ю, умноженныя на неопредѣленные коефиціенты т. п. Чтобы найти численное ихъ значеніе, мы поставимъ вмѣсто v частныя двѣ скорости, взятыя изъ предъидущей таблицы. По не многимъ испытаніямъ найдется, что скорости 1200 и 1800 наилучше удовлетворяютъ предположенной цѣли. Слѣдовательно, сдѣлавъ

сперва $v=1200$ и $s=59{,}095$ фунта; потомъ $v=1800$ и $s=94{,}804$ фунта, будемъ имѣть для опредѣленія величинъ m и n слѣдующія два уравненія:

$$1200^2 m + 1200 n = 59{,}095$$

$$1800^2 m + 1800 n = 94{,}804;$$

которыя, по раздѣленіи 1-го на 1200 и 2-го на 1800, перемѣнятся въ

$$1200 m + n = 0{,}03257916,$$

$$1800 m + n = 0{,}05266888:$$

отсюда удобно найдутся $m=0{,}0000334828$, $n=-0{,}00760027$ и общая формула выражающая сопротивленіе, въ фунтахъ приметъ видъ

$$0{,}00003348\ v^2 - 0{,}007600\ v = s\ (*),$$

но сопротивленія вычисленныя по сей формулѣ, согласуются съ настоящими только при скоростяхъ, кои больше 400 футовъ, для меньшихъ же скоростей формула

$$0{,}0000196\ v^2 = s$$

доставляетъ величины болѣе сходныя съ ис-

(*) Сію формулу, выражая въ Англійскихъ фунтахъ, чрезъ раздѣленіе числовъ оной на 1,10837 (примѣчаніе къ § 48), приведемъ къ $0{,}00003026\ v^2 - 0{,}007\ v$, то есть къ той формулѣ, которую Гютонъ вывелъ другимъ образомъ, но болѣе сложнымъ, нежели показанный. Смотри Nouvelles experiences d'Artillerie par Charles Hutton. Seconde partie. p. 149.

тинными сопротивленіями; она выводится, поставляя въ общее уравненіе $mv^2 = s$, соотвѣтственныя величины заимствованныя изъ таблицы, 1) $v = 100$ и $s = 0{,}193$; 2) $v = 200$ и $s = 0{,}786$; 3) $v = 300$ и $s = 1{,}787$; и потомъ между произшедшими выводами $m = \frac{s}{v^2} = 0{,}0000193$; $m = 0{,}0000196$; и $m = 0{,}0000198$, опредѣляя средній 0,0000196.

§ 51. Предъидущая формула $0{,}00003348.v^2 - 0{,}007600\ v = s$ даетъ сопротивленіе на ядро, котораго діаметръ $= 2$ дюймамъ. Чтобы распространить оную на ядро, котораго діаметръ $= k$ дюймамъ, то по правилу § 49 должно умножить первую часть равенства на $\frac{k^2}{4}$; и будетъ требуемое сопротивленіе.

$$s = (0{,}00000837.\ v^2 - 0,\ 0019.\ v)\ k^2,$$

или въ случаѣ количества k, выражаемаго въ фунтахъ

$$s = (0{,}00120538\ v^2 - 0{,}27361\ v)k^2$$

такимъ же образомъ, если формулу $0{,}0000196\ v^2 = s$, годящуюся лишь для малыхъ скоростей, умножимъ на $\frac{k^2}{4}$, получимъ сопротивленіе противъ ядра, котораго діаметръ $= k$ дюймамъ равное

$$s = 0{,}0000040\ v^2 k^2,$$

что приводится, въ случаѣ діаметра k выражаемаго въ фунтахъ, къ

$$s = 0{,}0007056 k^2 v^2,$$

означивъ плотность воздуха чрезъ D, плотность ядра чрезъ D′ и замѣтивъ при семъ, что вѣсъ кубическаго фута воздуха при 62 градусахъ температуры по Фаренгейтову термометру и при среднемъ давленіи атмосферы равенъ 0,083053 Русск. фунта, будемъ имѣть вѣсъ кубичнаго фута воды, выраженный въ сихъ фун. равный $\frac{1}{D}$ 0,083053, вѣсъ ядра въ сихъ же фунтахъ равный $\frac{\pi}{6} k^3 D' \frac{1}{D} 0{,}083053$

Если послѣднимъ симъ количествомъ раздѣлимъ ту и другую величину сопротивленія, выраженнаго таковымъ же вѣсомъ, то получимъ отношеніе укоснительной силы R сопротивленія къ дѣйствію тяжести g: оно будетъ относительно большихъ скоростей

$$\frac{R}{g} = (0{,}02771853 v^2 - 6{,}2918 v) \frac{D}{kD'}$$

и

$$R = (0{,}02771853 v^2 - 6{,}2918 v) \frac{Dg}{kD'} \ldots (w),$$

относительно же малыхъ скоростей

$$\frac{R}{g}=0{,}0162258\,\frac{Dv^2}{kD'}$$

и

$$R=0{,}0162258\,\frac{Dgv^2}{kD'}\ldots\ldots\ldots(x).$$

Приложеніе предъидущей Теоріи къ прямолинейному движенію снарядовъ въ воздухѣ.

§ 52. Хотя воздухъ оказываетъ на движущіяся тѣла вообще два дѣйствія, уменьшаетъ ихъ скорость и перемѣняетъ направленіе ихъ движенія (§ 39), но здѣсь мы будемъ разсуждать только о движеніи опыхъ по прямой линіи, или по кривой линіи, но весьма мало различающейся отъ прямой. Притомъ же, какъ предположеніе сіе особливо допущено быть можетъ въ случаѣ быстраго полета снарядовъ, пробѣгающихъ небольшія пространства, ибо тогда тяжесть не поспѣваетъ значительно искривить путь оныхъ, то и представимъ себѣ, что ядро, коего діаметръ$=k$, описываетъ прямую или кривую линію APB (фиг. 12) и въ началѣ движенія своего въ точкѣ A имѣетъ скорость$=a$, а по истеченіи времени t, пробѣжавъ пространство AP$=x$, въ точкѣ P получаетъ скорость$=v$. Сверхъ того примемъ, что

движеніе онаго не нарушается никакою другою силою, кромѣ сопротивленіл отъ воздуха.

По началамъ Динамики будемъ имѣть для опредѣленія различныхъ обстоятельствъ сего движенія слѣдующія уравненія $v = \frac{dx}{dt}$ $\theta = \frac{dv}{dt}$, и по исключеніи dt, $vdv = \theta dx$, въ которыхъ количество θ выражаетъ ускорительную или укоснительную силу безпрерывно дѣйствующую на движущееся тѣло по направленію касательной РК. А какъ въ разсматриваемомъ нами движеніи таковая сила происходитъ только отъ сопротивленія воздуха, которая найдется если сіе сопротивленіе, равное вѣсу воздушнаго столба, имѣющаго основаніемъ большой кругъ шара, а высотою въ λ разъ взятую высоту $\frac{v^2}{2g}$ соотвѣтствующую скорости v, раздѣлимъ на массу ядра (§ 45), то, означивъ плотность воздуха чрезъ D, плотность ядра чрезъ D′ и замѣтивъ притомъ, что вѣсъ воздушнаго столба равенъ его обьему $\frac{\pi k^2}{4} \frac{\lambda v^2}{2g}$ умноженному на относительную тяжесть воздуха Dg, и масса ядра равна его обьему $\frac{1}{6} \pi k^3$ умноженному на

D′, будемъ имѣть укоснительную силу сопротивленія

$$\theta = R = \frac{\frac{\pi k^2}{4}\frac{\lambda v^2}{2g}Dg}{\frac{1}{6}\pi k^3 D'} = \frac{3\lambda D v^2}{4kD'};$$

и сдѣлавъ для краткости количество $\frac{3\lambda D}{4kD'}$, выражающее законъ сопротивленія воздуха и входящее во всѣ вычисленія бросаемыхъ снарядовъ, равнымъ c, будетъ

$$R = cv^2 \quad \ldots \quad (\gamma).$$

Поставивъ сію величину въ уравненіе $vdv = \theta dx$ получимъ $vdv = -cv^2 dx$ или $\frac{dv}{v} = -cdx$; здѣсь отрицательный знакъ взятъ потому, что скорость убываетъ по мѣрѣ увеличиванія пространства x. Интегралъ послѣдняго уравненія даетъ $lgv = -cx + C$; постоянная C, придаваемая къ сему интегралу найдется по условію, что въ началѣ движенія должно быть вдругъ $x = o$, и $v = a$; но тогда $C = lga$ и уравненіе превратится въ $lga - lgv = cx$ или въ

$$lg\left(\frac{a}{v}\right) = cx.$$

Логарифмы, получаемые чрезъ сіи вычисленія суть гиперболическіе (Неперовые); въ системѣ

оныхъ основаніе, которое назовемъ e, есть число 2,718281828, а его обыкновенный логарифмъ $=0,43429448=Log\ e$ модулю, на который должно помножить гиперболическій логарифмъ, чтобы получить табличный. И такъ переходя отъ послѣдняго логарифмическаго выраженія къ численному получимъ

$$\frac{a}{p}=e^{cx} \ldots\ldots (z);$$

при чемъ количество e^{cx} найдется по обыкновенной системѣ логарифмовъ, относительно которыхъ будетъ $Lg\ e^{cx}=cxLg\ e=cx.\ 0,43429448$ (*). Посредствомъ уравненія (z), зная начальную скорость снаряда опредѣлимъ и ту остающуюся скорость, которую онъ будетъ имѣть, пробѣжавъ данное пространство; обратно зная скорость, которую снарядъ сохраняетъ, пробѣжавъ извѣстное пространство, опредѣлимъ и ту скорость, которую онъ имѣлъ въ началѣ сего пространства. Ибо въ первомъ случаѣ будетъ $p=ae^{-cx}$, а во второмъ $a=pe^{cx}$, что касается до потерянной скорости, причиненной снаряду сопротивленіемъ воздуха на пространствѣ x,

(*) Чтобы отличить обыкновенные логарифмы отъ гиперболическихъ, первые сопровождаемы будутъ знакомъ L а вторые знакомъ l.

то она равна $a - v = a - \frac{a}{e^{cx}} = a\left(\frac{e^{cx}-1}{e^{cx}}\right)$.

Впрочемъ изъ того же уравненія, когда извѣстны будутъ начальная скорость снаряда $= a$, остающаяся его скорость $= v$ и пространство имъ пройденное $= x$, найдется коеффиціентъ сопротивленія λ заключающійся въ количествѣ c; ибо по правилу рѣшенія неопредѣленно-степенныхъ уравненій будемъ имѣть c или $\frac{3\lambda D}{4kD'} = \frac{L\left(\frac{a}{v}\right)}{xLe}$ и отсюда $\lambda = \frac{4kD'}{3DxLe} L\left(\frac{a}{v}\right)$.

§ 53. А дабы по извѣстнымъ двумъ скоростямъ въ началѣ и въ концѣ движенія ядра опредѣлить время его полета; также по извѣстной начальной скорости ядра опредѣлить время, употребляемое имъ на пробѣжаніе даннаго пространства, то въ выше найденное уравненіе $dv = -cvdx$ вставимъ величину $dx = vdt$, и тогда оно преобразуется въ

$$\frac{dv}{v^2} = -cdt;$$

отсюда, по взятіи интеграла, получимъ $\frac{1}{v} = ct + C$. Для опредѣленія постоянной C имѣемъ

условіе, что когда $t = o$, то $v = a$; по сему будетъ $C = \frac{1}{a}$ и

$$\frac{1}{v} = ct + \frac{1}{a} \quad \ldots\ldots(a'),$$

а отсюда найдется $c = \frac{a - v}{cav}$. Поставивъ вмѣсто количества v найденную предъ симъ величину $= ae^{-cx}$, будемъ имѣть по надлежащемъ сокращеніи.

$$t = \frac{e^{cx} - 1}{ca} \quad \ldots\ldots(b').$$

Помощію послѣднихъ двухъ уравненій рѣшаются два сказанныя предложенія.

Изъ уравненія (b′) можно вывесть начальную скорость ядра, когда извѣстно будетъ время, употребляемое имъ на совершеніе даннаго пространства; также можно опредѣлить пространство, пройденное ядромъ, когда при извѣстной начальной его скорости дано будетъ и время, употребляемое имъ на совершеніе своего полета: въ первомъ случаѣ начальная скорость

$$a = \frac{e^{cx} - 1}{ct},$$

во второмъ случаѣ пространство

$$x = \frac{\mathrm{L}(cat + 1)}{cx\mathrm{L}e}.$$

§ 54. Уравненія $\frac{a}{v} = e^{cx}$ и $\frac{1}{v} = \frac{1}{a} + ct$, въ которыхъ $c = \frac{3\lambda D}{4kD'}$, ясно показываютъ, что если ядра разной величины, но при постоянной плотности, брошены будутъ съ равною скоростію, то или на одномъ и томъ же разстояніи или въ одно и тоже время, меньшія ядра теряютъ большую часть своей скорости, нежели большія ядра, и что послѣднія летятъ далѣе, чѣмъ первыя. А поелику количества движенія относятся какъ произведенія изъ массъ или вѣсовъ на скорости, то по причинѣ большаго вѣса и большей скорости большія ядра производятъ значительнѣйшее пораженіе.

Поставивъ діаметръ k' большаго ядра въ уравненіе 2-е, которое даетъ $v = \frac{a}{1+act}$ и сдѣлавъ $c' = \frac{3\lambda D}{4k'D'}$, найдемъ, что при постоянной начальной скорости $= a$ и той же плотности $= D'$, по истеченіи времени t, скорость большаго ядра, превышаетъ скорость меньшаго, количествомъ $= \frac{a}{1+ac't} - \frac{a}{1+act} = \frac{a^2t(c-c')}{(1+ac't)(1+act)}$.

Изъ тѣхъ же уравненій еще происходитъ, что при всѣхъ прочихъ равныхъ обстоятельствахъ, сказанная потеря скорости оказывается большею въ ядрахъ менѣе плотныхъ.

§ 55. Въ выраженіи $c=\frac{3\lambda D}{4kD'}$ вмѣсто содержанія плотностей D и D′ атмосфернаго воздуха и ядра можно принимать содержаніе ихъ удѣльныхъ тяжестей, ибо $\frac{D}{D'}=\frac{Dg}{D'g}$. Если ядра чугунныя, какъ-то обыкновенно у большихъ орудій бываетъ, то удѣльная тяжесть оныхъ есть отъ 7,09 до 7,207 и средняя между ими $D'g=7{,}149$, то есть во столько нашъ чугунъ тяжелѣе воды; но удѣльная тяжесть воздуха $Dg=0{,}0012$ (по Гютону), слѣдовательно при стрѣляніи изъ орудій чугунными ядрами можно взять постоянно

$$\frac{D'}{D}=5957{,}5.$$

Что касается до бомбъ и гранатъ, то не можетъ быть назначена для всѣхъ ихъ одинакая удѣльная тяжесть. А для найденія оной, должно взять вѣсъ пустой, не осмоленной гранаты или бомбы, и присоединить къ оному вѣсъ всыпаемаго въ ея пустоту пороха и вѣсъ снаряженной ея трубки; послѣ чего совокупный

вѣсъ раздѣлить на весь обьемъ, занимаемый гранатою или бомбою, изображая при томъ сей обьемъ въ кубическихъ футахъ; частное, которое покажетъ число фунтовъ въ кубическомъ футѣ снаряженной гранаты, раздѣлить еще на вѣсъ воды въ кубическомъ футѣ, то есть на 69,2108, чрезъ что и получится удѣльная тяжесть гранаты или бомбы.

Таблица показывающая поперечники, средній вѣсъ и плотности ядеръ, болибъ и гранатъ.

Наименованія снарядовъ.	Поперечники въ футахъ.	Средній вѣсъ въ торговыхъ фунтахъ	Плотности въ отношеніи къ водѣ или величины для D'.	Плотности въ отношеніи къ воздуху, или величины для $\frac{D'}{D}$.	Логарифмы количества D'.	Логарифмы количества $\frac{D'}{D}$.	Логарифмы поперечниковъ λ.
Ядра. 3 ф.	0,24055...	$3\frac{1}{2}$...	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .	9,5808080
6...	0,30283...	$7\frac{1}{8}$...	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .	9,4811989
12...	0,38158...	$14\frac{1}{4}$..	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .	9,5815856
18...	0,45758...	$21\frac{1}{2}$...	7,149...	5957,5...	0,8542455...	3,7750641..	9,6410575
24...	0,48308 ..	29 ...	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .	9,6840191
30...	0,52150...	$36\frac{1}{2}$...	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .	9,7172545
36...	0,55517..	1п. $4\frac{1}{2}$ф.	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .	9,7444260
Бомбы и гранат. 3 ф.	0,25892...	$5\frac{5}{24}$..	5,10047...	4230,4...	0,7076102...	3,6284298..	9,4151656
6	0,32617...	$5\frac{85}{96}$..	4,68029..	3900,2 ..	0 6702728..	3,5910869..	9,5154440
$\frac{1}{4}$ пу.	0,38900...	$11\frac{1}{32}$...	5,17134..	4309,5...	0,7136051...	3,6344269...	9,5899496
$\frac{1}{2}$..	0,49392 ..	$22\frac{5}{8}$...	5,18139..	4317,8...	0,7144463...	3,6352625 ..	9,6936566
1 ..	0,62400...	1п. $4\frac{1}{4}$ф.	5,02559...	4188,0..	0,7011871...	3,6220067...	9,7951846
2...	0,79058 ..	2... 7 ..	4,85858...	4048,8 ..	0,6865094 ..	3,6075265...	9,8979458
5...	1,07892...	5... 20...	4,85575...	4028,1...	0,6842824...	3,6051002 ..	0,0529893
Ружейной пули.	0,05208...	5,555 з.	11,552..	9460..	1,0550724...	3,9758911...	8,7166710

§ 56. Хотя въ предъидущихъ вычисленіяхъ, предполагающихъ сопротивленія пропорціональными квадратамъ скоростей, коеффиціентъ λ не бываетъ постояннымъ въ продолженіе движенія тѣла (§ 48), но относя его величину къ среднему сопротивленію, заключающемуся между тѣми, которыя соотвѣтствуютъ крайнимъ двумъ скоростямъ наибольшей и наименьшей, тогда не удаляясь много отъ истины, можно почитать оный во все время движенія неизмѣняемымъ. Ибо начиная по средней скорости, всѣ сопротивленія, выведенныя для большихъ скоростей будутъ менѣе, а для меньшихъ скоростей болѣе, чѣмъ дѣйствительныя; слѣдовательно недостатокъ первыхъ будетъ вознагражденъ избыткомъ другихъ, и цѣлый выводъ достаточно приблизится къ истинному. На примѣръ положимъ, что 12-ти-фунтовое ядро брошено съ начальною скоростію a=1400 футовъ въ секунду; сыщемъ то разстояніе, на которомъ скорость сія приведена будетъ къ v=1100 футовъ. Поелику въ семъ вопросѣ крайнимъ скоростямъ 1400 и 1100 принадлежатъ по таблицѣ сопротивленія (§ 48) 56,212 и 31,649, между которыми среднее=43,930, то косффи-

ціентъ λ, соотвѣтствующій сему послѣднему, заключающемуся въ таблицѣ между ближайшими сопротивленіями 39,095 и 47,331, противъ коихъ находятся коеффиціенты 0,96 и 0,99, очевидно по правилу пропорціональности промежуточныхъ разностей будетъ равенъ 0,98. Имѣя сей коеффиціентъ, который въ разсматриваемомъ нами движеніи можетъ уже почесться постояннымъ, сверхъ того, зная поперечникъ 12 фунт. ядра k=0,38158 фута и количество $\frac{D'}{D}$=5957,5, мы найдемъ, вычисливъ величину $\frac{1}{c}=\frac{4kD'}{3\lambda D}$, разстояніе § 52 (z).

$$x=\frac{La-Lv}{cLe}=745,8 \text{ фута;}$$

на которомъ ядро потеряетъ 300 футъ отъ сообщенной ему скорости.

Въ случаѣ скоростей не превосходящихъ 400 футовъ въ секунду, количество c въ предыидущихъ формулахъ постоянно можно брать равнымъ 0,0162258 $\frac{Dg}{kD'}$ (§ 51), или въ широтѣ С. Петербурга, гдѣ дѣйствіе тяжести g=32,214 фута, равнымъ 0,52269792 $\frac{D}{kD'}$

§ 57. Поелику при опредѣленіи разныхъ случаевъ движенія ядра, не всегда предполагаются данными объ крайнія скорости наибольшая и наименьшая, дабы посредствомъ ихъ возможно было имѣть значеніе коеффиціента λ, необходимаго для достиженія къ точнымъ выводамъ, тогда, если скорость движущагося снаряда будетъ значительна, мы употребимъ выраженіе укоснительной силы сопротивленія (w)

$$R = 0{,}02771853 \frac{Dgv^2}{kD'} - 6{,}2918 \frac{Dgv}{kD'},$$

и приложимъ оное къ рѣшенію вопросовъ изслѣдованныхъ въ предъидущихъ уже параграфахъ. Для сего сдѣлавъ $0{,}02771853 \frac{Dg}{kD'} = m$ и $6{,}2918 \frac{Dg}{kD'} = n$, и поступивъ подобно сказанному въ § 52, будемъ имѣть, по извѣстной формулѣ $vdv = \theta dx$, уравненіе

$$vdv = -(mv^2 - nv)dx,$$

изъ котораго по сокращеніи и отдѣленіи перемѣнныхъ величинъ получимъ

$$dx = -\frac{dv}{mv - n};$$

взявъ теперь интегралъ, который будетъ

$x = \frac{1}{m} l(mv - n) + C$, и опредѣливъ постоянную C при условіи $x = o$ и $v = a$, сверхъ того замѣнивъ гиперболическій логарифмъ обыкновеннымъ, найдется

$$x = \frac{1}{m \mathrm{L} e} \mathrm{L}\left(\frac{ma - n}{mv - n}\right),$$

и сдѣлавъ для краткости $\frac{n}{m} = \frac{6{,}2918}{0{,}02771853} = 226{,}9889 = q$, будетъ пространство выраженное въ функціи скорости

$$x = \frac{1}{m \mathrm{L} e} \mathrm{L}\left(\frac{a - q}{v - q}\right) \ldots\ldots (c')$$

отсюда, зная начальную скорость $b = a$ и пространство $= x$, найдемъ остающуюся скорость ядра

$$v = \frac{a + q(e^{mx} - 1)}{e^{mx}};$$

и обратно зная остающуюся скорость и пространство, найдемъ начальную скорость

$$a = q + (v - q) e^{mx}.$$

Выведемъ еще формулы для рѣшенія, по сему предмету, иныхъ задачъ зависящихъ отъ времени t.

Мы имѣемъ $dt = \frac{dx}{v} = -\frac{dv}{v(mv - n)}$; отсюда по извѣстному правилу интегрированія алгебраче-

скихъ сопзмѣримыхъ дробныхъ функцій, легко найдется

$$t = \frac{1}{n} l \left(\frac{mv - n}{v} \right) + C;$$

постоянная C опредѣлится по условію, предполагающему въ началѣ движенія $t = o$ и $v = a$, и будетъ очевидно

$$t = \frac{1}{nLe} L \left\{ \left(\frac{a - q}{v - q} \right) \frac{v}{a} \right\} \ldots\ldots (d'),$$

что опредѣляетъ время, по истеченіи котораго начальная скорость a, движущагося ядра приведена будетъ къ скорости b. Изъ сего уравненія по даннымъ количествамъ a и t получится.

$$v = \frac{aqe^{nt}}{q + a(e^{nt} - 1)};$$

и по даннымъ количествамъ v и t получится

$$a = \frac{qv}{v - (v - q)e^{nt}}$$

Потомъ поставивъ въ уравненіе (d') вмѣсто количества v равную величину $\frac{a + q(e^{mx} - 1)}{e^{mx}}$, будемъ имѣть

$$t = \frac{1}{nLe} L \left\{ 1 + \frac{q}{a} \left(e^{mx} - 1 \right) \right\} \ldots\ldots (e'),$$

и отсюда найдемъ

$$a = \frac{q(e^{mx}-1)}{e^{nt}-1}, \text{ и } x = \frac{1}{mLe} \mathrm{L}\left\{1 + \frac{a}{q}(e^{nt}-1)\right\}.$$

§ 58. Чтобы показать приложеніе выведенныхъ формулъ, то положимъ, 1) что требуется найти скорость свинцовой пули въ $\frac{3}{4}$ дюйма въ діаметрѣ, на разстояніи отъ начала движенія $x = 100$ футовъ и при начальной скорости бросанія $a = 1670$ футъ. Сей примѣръ взятъ изъ книги *Nouveaux principes d'Artillerie par Robins, commentés par Euler*, Глава II, предложеніе II.

Скорость сія найдется посредствомъ формулы

$$v = \frac{a + q(e^{mx}-1)}{e^{mx}},$$

въ которой, дабы имѣть количество $m = 0{,}0277185 \frac{Dg}{kD'}$, то надлежитъ замѣтить, что плотность или удѣльная тяжесть свинца $D' = 11{,}352$, діаметръ пули $k = \frac{3}{4}$ дюйма $= \frac{1}{16}$ фута, тяжесть $g = 32{,}18$ фута, плотность воздуха $D = 0{,}0012$ и множитель $q = 226{,}9889$. Вставивъ въ формулу приведенныя здѣсь числа, получимъ $\mathrm{L}(e^{mx}) = mx\mathrm{L}e = 0{,}0655193$, отсюда e^{mx}

$=1,16284$; слѣдовательно искомая скорость

$$v=\frac{1670+226,988\ 0,16284}{1,16284}=1468 \text{ футъ},$$

которая немного различается отъ скорости 1425 фут. найденной по опытамъ Робинса, а впрочемъ по замѣчанію Эйлера невѣрной, ибо вычисленіе оной основано было на предложеніяхъ не совсѣмъ справедливыхъ.

Въ семъ вопросѣ время t, употребляемое пулею на прохожденіе 100 футъ упомянутаго разстоянія, найдется прямо посредствомъ формулы (e'), то есть

$$t=\frac{1}{n\mathrm{L}e}\mathrm{L}\left(\frac{a+q(e^{mx}-1)}{a}\right),$$

въ которую поставивъ данныя числа, будемъ имѣть

$$\mathrm{L}(n\mathrm{L}e)=9,1723741-10,\ \mathrm{L}\left(\frac{a+q\,(e^{mx}-1)}{a}\right)$$

$=\mathrm{L}\left(\frac{1706,963}{1670}\right)=0,0095076$ и $\mathrm{L}t=\mathrm{L}(0,0095076)$ $-9,1723741+10=8,8056968-10$; отсюда $t=$ $0'',064$, что почти составляетъ $\frac{2}{31}$ секунды: сіе время есть то же самое, которое Робинсъ нашелъ изъ своихъ опытовъ.

Если въ представленномъ примѣрѣ станемъ

выводить скорость v изъ обыкновенной формулы (§ 52) $v = \frac{a}{e^{cx}}$ и притомъ согласно съ Невтоновымъ положеніемъ сдѣлаемъ $\lambda = \frac{1}{2}$, то получимъ $v = 1569$ футовъ; но сей выводъ весьма много отдаленъ отъ истиннаго.

2) Даны начальная скорость 12-ти фунтоваго ядра $a = 1400$ футъ и остающаяся его скорость $v = 1100$ футъ, найти соотвѣтствующее разстояніе x и время t.

Во первыхъ разстояніе найдется по формулѣ (c'), въ которой вычисливъ по логарифмамъ количество $\frac{1}{m\mathrm{Le}} = \frac{kD'}{0{,}0277185\mathrm{D}g\mathrm{Le}}$ заключающее въ себѣ діаметръ 12-ти-фунтоваго ядра (§ 55 табл.) $k = 0{,}38158$ фута, отношеніе $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}'} = 5957{,}5$, дѣйствіе тяжести $g = 32{,}214$ и модуль $\mathrm{Le} = 0{,}4342945$, будетъ $\mathrm{L}\left(\frac{1}{m\mathrm{Le}}\right) = 3{,}7680504$. Но $\mathrm{L}\left(\frac{a-q}{v-q}\right) = 0{,}1282824$, слѣдовательно

$$\mathrm{L}x = 3{,}7680504 + \mathrm{L}(0{,}1282824) = 2{,}8762175;$$

сему логарифму соотвѣтствуетъ число $x = 752$ фута, таково есть искомое разстояніе почти

одинаковое съ найденнымъ въ § 56 по другому способу.

Послѣ чего по формулѣ (e′) или прямо по формулѣ (d′), которая даетъ въ числахъ $L\left\{\left(\frac{a-q}{v-a}\right)\frac{v}{a}\right\}=0{,}0235471$, $L\left(\frac{1}{mLe}\right)=3{,}7680504$ и арифметическое дополненіе $Lq=7{,}6439953$, будемъ имѣть

$Lt=L(0{,}0235471)+3{,}7680504+7{,}6439953-10=9{,}7859831-10$

и отсюда искомое время $t=0''$, 608 почти$=\frac{3}{5}$ секунды.

3) Сыщемъ пространство пробѣгаемое 12-ти фунтовымъ ядромъ въ продолженіе 1 секунды, бросивъ его съ начальною скоростію 1425 футовъ въ секунду.

Для сего должно взять въ разсмотрѣніе формулу $x=\frac{1}{mLe}L\left(1+\frac{a}{q}(e^{nt}-1)\right)$, въ которой будемъ имѣть, какъ и въ предъидущемъ примѣрѣ, $L\frac{1}{mLe}=3{,}7680504$: при семъ найдется $L(e^{nt})=ntLe=qt.mLe=0{,}0387217$; $e^{nt}=1{,}09326$; $L\left(1+\frac{a}{q}(e^{nt}-1)\right)=0{,}2001585$; и слѣдовательно

$Lx = 5{,}7680504 + L(0{,}2001581) = 3{,}0694236$;

отсюда искомое пространство $x = 1173$ фута.

Въ концѣ сего пространства остающаяся скорость ядра, по формулѣ $v = \frac{ae^{nt}}{1 + \frac{a}{q}(e^{nt} - 1)}$, будетъ $v = 982{,}8$ фута въ секунду.

Рѣшая сей вопросъ по обыкновенной формулѣ (§ 53) $x = \frac{L(1 + act)}{cLe}$, и полагая согласно съ положеніемъ Ломбарда коеффиціентъ $\lambda = \frac{3}{5}$ (Traité du mouvement des projectiles par Lombard, p. 100), будемъ имѣть пространство $x = 1255$ футъ, а остающуюся скорость $v = \frac{a}{1 + act} = 1111$ футъ. Но по причинамъ прежде сказаннымъ, оба сіи вывода допущены быть не могутъ; при томъ же если сравнить коеффиціентъ $\lambda = \frac{3}{5}$ съ табличнымъ (§ 48), то ясно видно, что онъ служитъ только для весьма тихихъ движеній.

4) Найти скорость, которую 5-ти-пудовая бомба, брошенная съ начальною скоростію $a = 400$ футовъ въ секунду, будетъ имѣть на разстояніи $x = 2800$ футовъ отъ начала движенія.

Въ семъ случаѣ медленнаго движенія мы употребимъ формулу $v = \frac{a}{e^{cx}}$, относительно коей будетъ $c = 0{,}52269792\ \frac{D}{kD'}$ (§ 56); поперечникъ бомбы $k = 1{,}07892$; отношеніе $\frac{D'}{D} = 4028{,}1$; $L(e^{cx}) = cx\,Le = 0{,}146253$; и слѣдовательно $Lv = La - L(e^{xc}) = 2{,}4558070$: отсюда получимъ остающуюся скорость $v = 286$ футамъ.

Что касается до времени t, которое употребитъ бомба для движенія своего, приданныхъ въ предложенномъ вопросѣ обстоятельствахъ, то легко найдемъ оное посредствомъ формулы (b'), и будетъ $t = \frac{e^{cx} - 1}{ac} = 8''$, 3. Замѣтимъ еще, что отношеніе между укоснительною силою сопротивленія и между тяжестію при скорости движенія 5 пудовой бомбы въ 400 футъ, по § 51, есть $\frac{R}{g} = 0{,}5974$; при скорости въ 300 футъ есть $\frac{R}{g} = 0{,}3360$; при скорости въ 200 футъ $= 0{,}1493$, при скорости во 100 футъ $= 0{,}0373$; при скорости же въ 500 футъ $= 0{,}9334$.

§ 59. Изслѣдуемъ вертикальное движеніе тяжелыхъ тѣлъ въ воздухѣ въ двухъ различныхъ

случаяхъ, когда онѣ свободно падаютъ и когда брошены будутъ снизу вверхъ, принимая при семъ сопротивленіе пропорціональнымъ квадратамъ скоростей.

Въ такомъ случаѣ когда тѣло падаетъ, дѣйствуютъ на него безпрерывно двѣ противоположныя силы, ускорительная сила тяжести и ускорительная сила сопротивленія. Очевидно, что первая должна быть принимаема нѣсколько меньшею нежели тяжесть въ пустотѣ; и дабы сравнить оную съ сею послѣднею, то означивъ первую чрезъ g, вторую чрезъ G, объемъ тѣла чрезъ v, плотность его чрезъ D′, плотность воздуха чрезъ D и замѣтивъ еще, что вообще тѣло, заключающееся въ какой либо жидкости теряетъ столько вѣсу, сколько вѣситъ вытесненная имъ жидкость, будемъ имѣть вѣсъ или движущую силу онаго въ воздухѣ равную GVD′—GVD; и если раздѣлимъ сію величину на массу тѣла, которая равна VD′, то получимъ тяжесть, которою тѣло побуждается въ воздухѣ, равную

$$g = G\left(1 - \frac{D}{D'}\right).$$

Впрочемъ относительно всѣхъ снарядовъ коли-

чество $\frac{D}{D'}$ столь мало (§ 55), что дозволяется оное пренебречь и предположить $g = G$. Теперь въ разсужденіи укоснительной силы сопротивленія, предположеннаго нами пропорціональнымъ квадратамъ скоростей, мы знаемъ уже, что величина оной по истеченіи времени t изображается cv^2. Въ семъ выраженіи постоянный коеффиціентъ c, вообще зависитъ отъ вида тѣла, его плотности, также плотности срединьі, и для сферическихъ тѣлъ онъ равенъ $\frac{3\lambda D}{4kD'}$ (§52)

Симъ образомъ въ общихъ уравненіяхъ $\theta dt = dv$ и $v dv = \theta dx$, въ коихъ количество x означаетъ пространство и v скорость движенія, ускорительная сила $\theta = g - cv^2$, по постановленіи которой будемъ имѣть

$$dt = \frac{dv}{g - cv^2} \text{ и } dx = \frac{v dv}{g - cv^2}.$$

Первое изъ сихъ уравненій приведенное, чрезъ разложеніе второй части на простыя дроби, къ виду

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{g}} \left\{ \frac{dv}{\sqrt{g} + v\sqrt{c}} + \frac{dv}{\sqrt{g} - v\sqrt{c}} \right\},$$

ведетъ къ интегралу $t = \frac{1}{2\sqrt{gc}} l \left(\frac{\sqrt{g} + v\sqrt{c}}{\sqrt{g} - v\sqrt{c}} \right) + C$;

а второе очевидно имѣетъ интегралomъ $x = -\frac{1}{2c} l(g - cv^2) + C'$. Для опредѣленія постоянныхъ C и C′ положимъ, что тѣло въ началѣ своего движенія не получаетъ никакого побужденія, тогда будетъ вдругъ $t = o$, $x = o$ и $v = o$, а въ слѣдствіе сего $C = o$ и $C' = \frac{1}{2c} l(g)$; чрезъ что общія выраженія времени и пространства въ функціи скорости перемѣнятся въ

$$t = \frac{1}{2\sqrt{gc}} l\left(\frac{1 + v\sqrt{\frac{c}{g}}}{1 - v\sqrt{\frac{c}{g}}}\right) \ldots\ldots (1)$$

и

$$x = -\frac{1}{2c} l\left(1 - \frac{cv^2}{g}\right) \ldots\ldots (2),$$

переходя отъ гиперболическихъ его логарифмовъ къ числамъ, и означая чрезъ e основаніе оныхъ, получимъ

$$\frac{1 - v\sqrt{\frac{c}{g}}}{1 + v\sqrt{\frac{c}{g}}} = e^{-2t\sqrt{gc}} \ldots\ldots (3), \text{ и } 1 - \frac{cv^2}{g} = e^{-2cx};$$

отсюда найдется скорость въ каждое мгновеніе

$$v = \sqrt{\frac{g}{c}} \left(\frac{e^{2t\sqrt{gc}} - 1}{e^{2t\sqrt{gc}} + 1}\right) \ldots\ldots (4)$$

и скорость соотвѣтственная высотѣ

$$v = \sqrt{\frac{g}{c}}\sqrt{1-e^{-2cx}} \quad \ldots\ldots (5)$$

Послѣ сего поставивъ въ уравненіе (1), которому можно дать видъ $t = \frac{1}{2\sqrt{gc}}\left\{2l\left(1+v\sqrt{\frac{c}{g}}\right) - l\left(1-\frac{cv^2}{g}\right)\right\}$, вмѣсто v величину въ x, получимъ время паденія тѣла съ данной высоты

$$t = x\sqrt{\frac{c}{g}} + \frac{1}{\sqrt{gc}}\, l\left(1+\sqrt{1-e^{-2cx}}\right) \quad \ldots\ldots (6).$$

Но по сравненіи выраженій (4) и (5) имѣемъ

$$\sqrt{1-e^{-2cx}} = \frac{e^{2t\sqrt{gc}}-1}{e^{2t\sqrt{gc}}+1}$$

и

$$1+\sqrt{1-e^{-2cx}} = \frac{2e^{2t\sqrt{gc}}}{e^{2t\sqrt{gc}}+1} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(1+e^{-2t\sqrt{gc}}\right)},$$

то поставивъ сію величину въ уравненіе (6) и опредѣляя потомъ x, найдется высота соотвѣтствующая времени паденія.

$$x = t\sqrt{\frac{g}{c}} + \frac{1}{c}\, l\frac{1}{2}\left(1+e^{-2t\sqrt{gc}}\right) \quad \ldots\ldots (7).$$

§ 60. Мы усматриваемъ въ уравненіяхъ (3)

и (5), что съ увеличиваніемъ времени или пространства, проходимаго падающимъ тѣломъ, неопредѣленно-степенныя количества въ нихъ заключающіяся, постепенно уменьшаются и дѣлаются почти ничтожными по истеченіи болѣе или менѣе значительнаго времени, смотря какъ коеффиціентъ $2\sqrt{gc}$ будетъ больше или меньше; но тогда сіи уравненія даютъ $v' = \sqrt{\frac{g}{c}}$.

И такъ движеніе падающихъ тѣлъ въ однородной жидкости сначала будучи перемѣнное, потомъ по прошествіи нѣкотораго времени становится почти единообразнымъ и совершающимся со скоростію $v' = \sqrt{\frac{g}{c}}$, которая вообще въ отношеніи къ снарядамъ есть (§ 51 и 52)

$$v' = \sqrt{\frac{4kD'g}{3\lambda D}} = \sqrt{\frac{kD'}{0{,}0162258.\,D}}$$

или

$$v' = 7{,}85049\sqrt{\frac{kD'}{D}} \ldots\ldots (f'),$$

а въ отношеніи же къ ядрамъ

$$v' = 605{,}94\sqrt{k} \ldots\ldots (g');$$

то есть самыя большія или окончательныя единообразныя скорости, какія могутъ пріобрѣсти снаряды нисходя въ воздухѣ, относятся

между собою какъ корни квадратныя изъ произведеній ихъ діаметровъ на плотности, и при постоянной плотности относятся какъ корни квадратныя изъ діаметровъ. Хотя по всей строгости нисходящіе снаряды никогда не достигаютъ сихъ скоростей въ конечное время или по совершеніи конечнаго пути, однако онѣ весьма близко къ нимъ подходятъ чрезъ довольно короткое время, что вскорѣ мы и увидимъ. Уравненіе $v = \sqrt{\frac{g}{a}}$ или $cv^2 = g$ и общее значеніе количества c показываютъ, 1) что при всѣхъ прочихъ равныхъ обстоятельствахъ, плотнѣйшія тѣла падаютъ въ воздухѣ скорѣе; въ пустомъ же мѣстѣ всѣ онѣ падаютъ съ равною скоростію; 2) что тяжелое тѣло, во время своего нисхожденія въ воздухъ, тогда только, достигаетъ самой большой единообразной скорости, когда укоснительная сила сопротивленія сдѣлается равною тяжести, или когда полное сопротивленіе равно будетъ вѣсу тѣла. Ибо какъ скоро сіе послѣдуетъ, тогда постоянныя ускоренія, сообщаемыя тѣлу въ каждое мгновеніе тяжестію, безпрестанно уничтожаться будутъ противоположною силою со-

противленія сравнявшеюся уже съ тяжестію, и сего довольно, чтобы скорость осталась постоянною и движеніе единообразнымъ.

§ 61. Посредствомъ формулъ (f) и (g') составлена слѣдующая таблица, въ которой показаны 1) самыя большія окончательныя скорости нашихъ снарядовъ свободно падающихъ въ воздухѣ, и 2) высоты, соотвѣтствующія симъ скоростямъ въ безвоздушномъ пространствѣ, вычисленныя по формулѣ $h = \frac{v'^2}{2g} = \frac{v'^2}{64,428}$

Названіе снарядовъ.		Окончательныя единообразныя скорости v' въ футахъ.	Высоты h соотвѣтствующія скоростямъ v' въ футахъ.
Ядра.	3 фунт.	297	1370.
	6	334	1730.
	12	374	2175.
	18	401	2494.
	24	421	2753.
	30	438	2972.
	36	451	3164.

Названіе снарядовъ.		Окончательныя единообразныя скорости v' въ футахъ.	Высоты h соотвѣтственныя скоростямъ v' въ футахъ.
Бомбы и гранаты.	3 фунт.	260	1053.
	6	280	1217.
	¼ пуда.	321	1604.
	½	363	2040.
	1	401	2500.
	2	444	3062.
	5	517	4157.
Картечныя пули.	1 No.	161	404.
	5	192	570.
	7	212	700.
	9	244	926.
Ружейная пуля.		174	471.

(*)

Помощію сей таблицы легко увѣриться, что высота и время потребныя для того, да бынадаю-

(*) Гранитный камень вѣсомъ въ 1 фунтъ, сферическаго вида и плотности=2,5 имѣетъ поперечникъ k=2,673 дюйма и нисходя въ воздухѣ получаетъ окончательную единообразную скорость v'=169 футъ въ секунду; вѣсомъ въ 5 фунта имѣетъ поперечникъ k=5,855 дюйма и окончательную скорость v'=204 фута въ секунду; а вѣсомъ въ 6 фунтовъ

щій въ воздухѣ снарядъ пріобрѣлъ скорость немного различающуюся отъ единообразной скорости, не бываютъ очень значительны. Ибо взявъ, примѣрно, вмѣсто окончательной скорости 244 фута, которая принадлежитъ картечной пулѣ No. 9, нѣсколько меньшую скорость $v = 240$ футъ, то по формуламъ (1) и (2) предъидущаго параграфа найдется время $t = 18'',2$ и высота $x = 3157$ футовъ. Вообще если сдѣлаемъ $v = v' - \delta$, и при семъ замѣтимъ, что $v' = \sqrt{\frac{g}{c}}$ и $\frac{1}{2c} = k$, то упомянутыя формулы примутъ видъ

$$t = \frac{k}{v' \mathrm{L}e} \mathrm{L}\left(\frac{2v'}{\delta} - 1\right) \text{ и } x = \frac{k}{\mathrm{L}e} \mathrm{L}\left(\frac{v'^2}{2\delta v' + \delta^2}\right);$$

въ случаѣ же весьма малой величины δ въ сравненіи съ v', можно принять $x = \frac{k}{\mathrm{L}e} \mathrm{L}\left(\frac{v'}{2\delta}\right)$.

§ 62. Остается теперь разсмотрѣть движеніе тѣла, брошеннаго вертикально снизу вверхъ. Въ такомъ случаѣ тяжесть и сопротивленіе

имѣетъ $k = 4{,}857$ дюйма и $v' = 229$.

Узнаемъ послѣ, что предъидущія окончательныя единообразныя скорости суть предѣлы скоростей, пріобрѣтаемыхъ падающими тѣлами при навѣсномъ ихъ движеніи, которое особливо происходитъ отъ выстрѣловъ, называемыхъ въ Артиллеріи *вертикальными выстрѣлами* (feu verticaux).

воздуха дѣйствуютъ въ противоположную сторону движенія, которое сообщено тѣлу: посему удержавъ прежнія обозначенія, будемъ имѣть $\theta = -(g + cv^2)$, поставивъ сію величину въ общіяу равненія движеніл $\theta dt = dv$ и $v dv = \theta dx$, кои даютъ

$$dt = \frac{dv}{g + cv^2} \text{ и } dx = -\frac{v dv}{g + cv^2}$$

и взявъ потомъ интегралы, получимъ

$$t = -\frac{1}{\sqrt{gc}} \cdot Arc\left(tg = v\sqrt{\frac{c}{g}}\right) + C, \text{ и } x = -\frac{1}{2c} l(g + cv^2) + C'.$$

Для опредѣленія постоянныхъ C и C′, означимъ скорость бросанія чрезъ a и примемъ, что въ началѣ движенія будетъ вдругъ $t = o$, $x = o$ и $v = a$; тогда по условію сему найдется $C = \frac{1}{\sqrt{gc}} Arc\left(tg = a\sqrt{\frac{c}{g}}\right)$ и $C' = \frac{1}{2c} l(g + ca^2)$. Сіи величины, будучи вставлены въ предъидущія уравненія, перемѣнятъ ихъ въ

$$t = \frac{1}{\sqrt{gc}}\left\{Arc\left(tg = a\sqrt{\frac{c}{g}}\right) - Arc\left(tg = v\sqrt{\frac{c}{g}}\right)\right\}$$

$$x = \frac{1}{2c} l\left(\frac{1 + \frac{c}{g}a^2}{1 + \frac{c}{g}v^2}\right)$$

отсюда изъ перваго уравненія опредѣливъ скорость въ какое либо мгновеніе, легко найдется изъ втораго и соотвѣтствующее пространство.

Очевидно, что брошенное тѣло поднимается вверхъ дотолѣ, пока скорость его v не сдѣлается равною нулю: назвавъ h самую большую высоту восхожденія и уравнивъ въ послѣднихъ выраженіяхъ количество v нулю, получимъ какъ сію высоту, такъ и соотвѣтственное ей время посредствомъ уравненій

$$h = \frac{1}{2c\mathrm{L}e}\,\mathrm{L}\left(1 + \frac{c}{g}a^2\right) \ldots\ldots (8)$$

и

$$t = \frac{1}{\sqrt{cg}} \cdot \mathrm{A}rc\left(tg = a\sqrt{\frac{c}{g}}\right) \ldots\ldots (9),$$

изъ коихъ первое ведетъ къ явному заключенію, что при всѣхъ прочихъ равныхъ обстоятельствахъ плотнѣйшія тѣла восходятъ до большей высоты; второе же показываетъ, что съ увеличиваніемъ начальной скорости a отъ нуля до безконечности, время восхожденія t увеличивается только отъ нуля до предѣла $t = \frac{1}{\sqrt{cg}} \times \frac{1}{4}$ окружности круга, котораго радіусъ = 1.

Сей предѣлъ $t = \frac{\pi}{2\sqrt{cg}}$ составляетъ наиболь-

щее время вертикальнаго восхожденія тѣлъ въ воздухѣ, которое относительно снарядовъ находится пропорціональнымъ корню квадратному изъ произведенія ихъ поперечниковъ на плотности и при равныхъ плотностяхъ пропорціональнымъ корню квадратному изъ поперечниковъ (§ 52).

Обращая уравненія (8) и (9) и выводя изъ нихъ a, найдется начальная скорость, которая должна быть сообщена снаряду, дабы онъ поднялся на данную высоту h, равная

$$a = \sqrt{\frac{g}{c}}\ \sqrt{e^{2ch} - 1} \quad \ldots\ldots (10),$$

а начальная скорость, соотвѣтствующая извѣстному времени восхожденія, равная

$$a = \sqrt{\frac{g}{c}}\ tg\ (t\sqrt{cg}) \quad \ldots\ldots (11),$$

если послѣднюю величину поставимъ въ уравненіе (8), то получимъ еще

$$h = \frac{1}{cLe}\ \mathrm{L}sec\ (t\sqrt{cg}) \quad \ldots\ldots (12)$$

и отсюда

$$t = \frac{1}{\sqrt{cg}}\ Arc\ (cos = e^{-ch}) \quad \ldots\ldots (13).$$

§ 63. Найденныя формулы въ двухъ предположеніяхъ вертикальнаго восхожденія и нисхож-

денія тѣлъ въ воздухѣ, можно связать между собою и между прочими вывесть формулу для вычисленія начальной скорости a, съ которою бросается снарядъ прямо вверхъ, если при семъ замѣчено будетъ время, употребляемое имъ для совершенія всего полета при восхожденіи и нисхожденіи своемъ. Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіе (5) поставимъ вмѣсто x самую большую высоту (8) $h=\frac{1}{2c}l(1+\frac{c}{g}a^2)$, соотвѣтствующую начальной скорости a, и при томъ замѣтимъ, что $\sqrt{1-e^{-2cx}}=\sqrt{1-\frac{1}{1+\frac{c}{g}a^2}}=\frac{a\sqrt{\frac{c}{g}}}{\sqrt{1+\frac{c}{g}a^2}}$, то найдется время, которое употребитъ снарядъ для нисхожденія съ сей высоты, посредствомъ выраженія $\frac{1}{\sqrt{cg}}l\sqrt{1+\frac{c}{g}a^2}+\frac{1}{\sqrt{cg}}l\left(1+\sqrt{\frac{a\sqrt{\frac{c}{g}}}{1+\frac{c}{g}a^2}}\right)$ или $\frac{1}{\sqrt{cg}}l\left(a\sqrt{\frac{c}{g}}+\sqrt{1+\frac{c}{g}a^2}\right)$; потомъ присоединивъ сіе время къ тому, которое онъ для восхожденія употребляетъ (9), и сумму уравнивъ времени T изъ опыта замѣченному, бу-

демъ имѣть для отысканія начальной скорости a уравненіе.

$$T = \frac{1}{\sqrt{cg}}\left\{ l\left(a\sqrt{\frac{c}{g}} + \sqrt{1+\frac{c}{g}a^2}\right) + Arc\left(tg = a\sqrt{\frac{c}{g}}\right)\right\},$$

которое приводится къ простѣйшему виду сдѣлавъ $a\sqrt{\frac{c}{g}} = tg2\alpha$ или $Arc\left(tg = a\sqrt{\frac{c}{g}}\right) = 2\alpha$, ибо тогда будетъ

$$a\sqrt{\frac{c}{g}} + \sqrt{1+\frac{c}{g}a^2} = \frac{sin2\alpha+1}{cos2\alpha} = \frac{1 - cos(90°+2\alpha)}{sin(90°+2\alpha)}$$

$$= \frac{2sin^2(45°+\alpha)}{2sin(45°+\alpha)cos(45°+\alpha)} = tg(45°+\alpha) \text{ и}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{cg}}\left\{2\alpha + \frac{T}{Le}Ltg(45°+\alpha)\right\} \ldots\ldots (h').$$

Изъ сего уравненія сыскавъ чрезъ испытаніе длину дуги h, для которой обѣ части равенства сдѣлались бы равными, получимъ начальную скорость

$$a = \sqrt{\frac{g}{c}}tg.2\alpha \ldots\ldots (1),$$

потомъ и ту скорость, которую тѣло пріобрѣтаетъ при возвращеніи своемъ къ точкѣ бросанія. Сія послѣдняя есть менѣе первой, ибо исключивъ между уравненіями (2) и (3) количество $x = h$, будемъ имѣть очевидно $v = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{c}{g}a^2}}$.

§ 64. Сравнимъ высоту и время вертикальнаго восхожденія тѣла, найденныя въ предъидущемъ вопросѣ, съ тѣми, которыя выводятся въ предположеніи точнѣйшаго выраженія ускоряющей силы сопротивленія $R = mv^2 + nv$ (§ 56). Очевидно, что тогда уравненія движенія будутъ

$$dx = -\frac{v\,dv}{mv^2 + nv + g} \text{ и } dt = -\frac{dv}{mv^2 + nv + g},$$

которыя при положеніи $v = z - \frac{n}{2m}$ и $g - \frac{n^2}{4m} = \alpha$ преобразуются въ

$$dx = -\frac{z\,dz}{mz^2 + \alpha} + \frac{n}{2m}\frac{dz}{mz^2 + \alpha} \text{ и } dt = -\frac{dz}{mz^2 + \alpha}.$$

Взявъ интегралы сихъ уравненій, будемъ имѣть

$$x = -\frac{1}{2m} l(mz^2 + \alpha) + \frac{n}{2m\sqrt{\alpha m}} Arc\left(tg = z\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\right) + C$$

и

$$t = -\frac{1}{\sqrt{\alpha m}} Arc\left(tg = z\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\right) + C',$$

отсюда по постановленіи $z = v - \frac{n}{2m}$ получимъ

$$x = -\frac{1}{2m} l(mv^2 + nv + g) + \frac{n}{2m\sqrt{\alpha m}} Arc\left(tg = \frac{2mv + n}{2\sqrt{\alpha m}}\right) + C$$

и

$$t = -\frac{1}{\sqrt{m\alpha}} Arc\left(tg = \frac{2mv + n}{2\sqrt{\alpha m}}\right) + C.$$

Но въ началѣ движенія имѣемъ $t=o$, $x=o$, и $v=a$=начальной скорости, слѣдовательно поставивъ сіи величины въ послѣдыія уравненія для x и t, будемъ имѣть

$$o=-\frac{1}{2m}l(ma^2-na+g)+\frac{n}{2m\sqrt{\alpha m}}.Arc\left(tg=\frac{2ma-n}{2\sqrt{\alpha m}}\right)+C$$

$$o=-\frac{1}{\sqrt{\alpha m}}.Arc\left(tg=\frac{2ma-n}{2\sqrt{\alpha m}}\right)+C;$$

вычитая сіи уравненія изъ предшествующихъ и полагая $v=o$, что соотвѣтствуетъ наибольшей высотѣ h восхожденія тѣла, получимъ сію высоту

$$h=\frac{1}{2mLe}Lg\left(\frac{ma^2-na+g}{g}\right)+\frac{n}{2m}\sqrt{\alpha m}.Arc\left(tg=\frac{2a\sqrt{\alpha m}}{2g-na}\right)\ldots(14),$$

и соотвѣтствующее время восхожденія

$$t=\frac{1}{\sqrt{\alpha m}}.Arc\left(tg=\frac{2a\sqrt{\alpha m}}{2g-na}\right)\ldots(15).$$

Если начальная скорость a безконечно великая, тогда изъ послѣдняго уравненія опредѣлится предѣлъ наибольшаго времени для вертикальнаго восхожденія тѣла; который будетъ

$$t=\frac{1}{\sqrt{\alpha m}}.Arc\left(tg=-\frac{2\sqrt{\alpha m}}{n}\right)\ldots(16).$$

§ 65. Здѣсь предложимъ нѣкоторые примѣры для предъидущихъ формулъ.

1) Вычислимъ высоту вертикальнаго восхожденія 24 фунтоваго ядра, броженнаго съ на-

чальною скоростію $a = 1600$ футъ въ секунду.

Для сего возмемъ формулу:

$$\lambda = \frac{1}{2m\,\mathrm{L}e}\,\mathrm{L}g\frac{ma^2 - na + g}{g} + \frac{n}{2m\sqrt{\alpha m}} \cdot Arc\left(tg = \frac{2a\sqrt{\alpha m}}{2g - na}\right)$$

для коей помощію таблицы § 55 удобно найдется (§ 57), $\mathrm{L}m = 6{,}4913538 - 10$ и $\mathrm{L}n = 8{,}8468935 - 10$; послѣ чего по порядку будемъ имѣть

$\mathrm{L}.ma^2 = 2{,}8995938$ ..... $ma^2 = 793{,}585$

$\mathrm{L}.na = 2{,}0510135$ ..... $na = 112{,}464$

$g = 32{,}214$

$ma^2 - na + g = 713{,}335$

$\mathrm{L}g.\left(\frac{ma^2 - na + g}{g}\right) = 1{,}3452489$

$\mathrm{LL}\left(\frac{ma^2 - na + g}{g}\right) = 0{,}1288026$

$\mathrm{L}.(2m\mathrm{L}e) = 6{,}4301681 - 10$ } при чемъ $\mathrm{LL}e = \mathrm{L}(0{,}43429448) = 9{,}6377843 - 10.$

$\mathrm{L}\left\{\frac{1}{2m\mathrm{L}e}.\mathrm{L}\left(\frac{ma - na + g}{g}\right)\right\} = 3{,}6986345$

отсюда 1-й членъ $\frac{1}{2m\mathrm{L}e}.\mathrm{L}\left(\frac{ma^2 - na + g}{g}\right) =$ 4996,1 фута.

Относительно 2-го члена, въ которомъ $\mathrm{L}m = gm - \frac{n^2}{4}$, будетъ

$\mathrm{L}.gm = 7{,}9993985 - 10$ ..... $gm = 0{,}0998616$

$\mathrm{L}.\frac{n^2}{4} = 7{,}0917270 - 10$ ..... $\frac{n^2}{4} = 0{,}0012351$

$gm - \frac{n^2}{4} = \mathrm{L}m = 0{,}0087509$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L},\sqrt{am} = 8{,}9710286 - 10 \\ \mathrm{L}2a. \quad = 3{,}5051500 \end{array}\right\}$$

$\mathrm{L}.2a\sqrt{am} = 2{,}4761786;$

но $na = 112{,}464$, посему будетъ $na - 2g = 48{,}036$ и $\mathrm{L}(na - 2g) = 1{,}6815668$; а чрезъ то найдется

$$\mathrm{L}g\left(tg = \frac{2a\sqrt{am}}{na - 2g}\right) = 0{,}7946118:$$

логарифму сего тангенса, соотвѣтствуетъ дуга $= 80°\,53'\,1''$; и такъ будемъ имѣть $Arc\left(tg = \frac{2a\sqrt{am}}{2g - na}\right)$ $= 180° - 80°\,53'\,1'' = 99°\,6'\,59'' = 1{,}7298073$ въ частяхъ табличнаго радіуса, который равенъ 1-цѣ.

Послѣ чего найдется

$$\mathrm{L}.Arc\left(2g = \frac{2a\sqrt{am}}{2g - na}\right) = 0{,}2379977$$

$$\mathrm{L}\left(\frac{n}{2m\sqrt{am}}\right) \quad = 3{,}0832697.$$

$$\mathrm{L}.\frac{n}{2m\sqrt{am}}\,Arc\left(2g = \frac{2a\sqrt{am}}{2g - na}\right) = 3{,}3212674$$

отсюда 2-й членъ формулы будетъ

$$\frac{n}{2m\sqrt{am}}.\,Arc\left(tg = \frac{2a\sqrt{am}}{2g - na}\right) = 2095{,}4 \text{ фута},$$

сложивъ его съ первымъ, получимъ требуемую высоту $h = 7091{,}5$ фута $= 1013$ саженей.

Въ безвоздушномъ пространствѣ сія высота

$h = \frac{a^2}{2g} = 39734$ фута $= 5676$ саженей, которая около 6-ти разъ болѣе предъидущей.

Въ предложенномъ примѣрѣ, вычисляя высоту h по формулѣ (8) § 62, и полагая при семъ въ выраженіи количества $c = \frac{3\lambda D}{4kD'}$, коеффиціентъ $\lambda = \frac{3}{5}$ (по Ломбару), а слѣдовательно $Lc = 6{,}1941293 - 10$, найдется $h = 8305$ футъ $= 1186\frac{3}{4}$ сажени.

2) Вычислимъ еще время для всего вертикальнаго восхожденія 24 фунтоваго ядра, брошеннаго съ прежнею начальною скоростію $a = 1600$ футъ.

Если взять формулу (15), въ которой какъ и въ предъидущемъ примѣрѣ будетъ

$$L.\ Arc\left(tg = \frac{2a\sqrt{am}}{2g - na}\right) = 0{,}2379977$$

и

$$L.\sqrt{am} = 8{,}9710286 - 10,$$

то найдется $Lt = 1{,}2669691$ и отсюда время $t = 18'',49$. Въ безвоздушномъ же пространствѣ сіе время $t = \frac{a}{g} = 49'',67$.

Но время восхожденія сего ядра до безконечно большой высоты, брошеннаго съ безко-

нешю великою скоростію, по формулѣ (16), въ которой $Arc\left(tg = -\frac{2\sqrt{am}}{n}\right) = 110°35'28'' = 1{,}9301790$ въ частяхъ табличнаго радіуса, будетъ $t = 20'',6$.

Если же взять формулу (9). § 61 для вычисленія времени въ данномъ примѣрѣ, то найдется, при положеніи $c = \frac{gD}{2ohD'}$, сіе время $t = 18''$, 24 то же, что и выше. Самое большое время для вертикальнаго восхожденія 24 фунтоваго ядра, когда его скорость бросанія $a = \infty$, будетъ (§ 62) $t = \frac{\pi}{2\sqrt{cg}} = 22''1$; здѣсь количество $\pi = 3{,}14159265$ и $L\pi = 0{,}4971499$.

Вычисленіе прицѣльныхъ выстрѣловъ.

§ 66. Хотя найденныя въ параграфахъ 51 и 52 формулы не показываютъ свойства кривой, полетомъ ядра описываемой, но онѣ могутъ служить съ пользою для опредѣленія многихъ обстоятельствъ, касающихся до прицѣльныхъ выстрѣловъ, или такихъ когда линія прицѣливанія направляется прямо въ предметъ, въ который попасть желаемъ. Въ самомъ дѣлѣ, по-елику при выстрѣлахъ сего рода уголъ состав-

ляемый линіею прицѣливанія съ осью канала обыкновенно бываетъ невеликъ, то кривая линія пробѣгаемая ядромъ столь мало разнствуетъ отъ дальности его полета, или прямой линіи, проведенной отъ отверстія орудія къ предмету, что можно безъ чувствительной погрѣшности почесть ихъ равными; и слѣдовательно опредѣливъ одно изъ оныхъ, можно безъ ошибки въ практическомъ употребленіи брать ее и за другую. И такъ пусть количество x представляетъ часть кривой BOM (фиг. 8), описанной полетомъ ядра отъ орудія до предмета M, который находится на пресѣченіи сей кривой съ прицѣльною линіею IIM; и назовемъ начальную скорость ядра $= a$: въ слѣдствіе основаній, кои предложены въ § 53, будемъ имѣть время потребное для пробѣжанія пространства x

$$t = \frac{e^{cx} - 1}{ac}.$$

Но то же время t, другимъ образомъ можно еще изобразить; въ самомъ дѣлѣ продолживъ ABCD ось орудія до пресѣченія съ вертикальною PM проходящею чрезъ предметъ, часть DM сей вертикальной будетъ высота, съ коей ядро,

побуждаемое тяжестью, упадаетъ въ то самое время, въ которое оно переносится отъ B къ M. А какъ сія высота при малыхъ углахъ прицѣливанія, кои здѣсь преимущественно допускаются, бываетъ невелика, то разсматриваемое время паденія снаряда съ высоты DM въ воздухѣ почти будетъ такое же, какъ и въ безвоздушномъ пространствѣ; слѣдовательно по извѣстному закону движенія свободно падающихъ тѣлъ въ пустотѣ будемъ имѣть $DM = \frac{1}{2}gt^2$, и

$$t = \sqrt{\frac{2DM}{g}}.$$

Теперь если проведемъ горизонтальную линію BP и примемъ разстояніе BM отъ средины отверстія орудія до предмета, равнымъ пространству x пробѣгаемому снарядомъ, то изъ разсматриванія треугольниковъ BPM и BPD, очевидно найдется $DM = PD - PM = BP.\ tg\ DBP = BP.\ tg\ MBP = MB.\ cos\ MBP\ (tg DBP - tg MBP) = x cos\alpha\ (tg\theta - tg\alpha)$ или $DM = \frac{x.sin(\theta - \alpha)}{cos\theta}$, гдѣ количества α, θ удерживаютъ то же значеніе, какъ и въ параграфахъ 22 и 25. Вставивъ послѣднюю величину въ предъидущее выраженіе для t, получимъ

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g} \cdot \frac{sin(\theta - \alpha)}{cos\theta}};$$

и если вмѣсто угла DBM$=\theta-\alpha$, возмемъ прицѣльный уголъ BCH$=$GHI$=\gamma$ (§ 22) весьма немного отъ онаго различающійся, то будемъ имѣть

$$t=\sqrt{\frac{2x}{g}\cdot\frac{sin\gamma}{cos\theta}}.$$

Но уравненіе $\theta-\alpha=\gamma$ показываетъ, что когда предметъ находится на одномъ съ орудіемъ горизонтѣ, или близъ сего горизонта такъ, что уголъ α равенъ будетъ или нулю или по своей малости можетъ быть отброшенъ, тогда $\theta=\gamma$ и слѣдовательно $t=\sqrt{\frac{2x}{g}\frac{sin\gamma}{cos\gamma}}=\sqrt{\frac{2x}{g}\cdot tg\gamma}$. Въ такомъ же случаѣ, когда предметъ находится столь высоко надъ горизонтомъ, что уголъ α довольно будетъ значителенъ, должно удержать прежнее уравненіе, въ которомъ кромѣ угла прицѣливанія γ входитъ еще въ разсмотрѣніе уголъ θ возвышенія орудія, изъ конхъ первый посредствомъ втораго опредѣляется чрезъ уравненіе (r) § 23 и разность между ими равна $\theta-\gamma=\alpha=$ углу мѣстности$=\delta$; зависимо отъ сего послѣдняго $sin\gamma=\frac{n\cos\alpha}{m}$, $\theta=\gamma+\alpha$ и $n=\frac{msin\gamma}{cos\alpha}$.

Впрочемъ при дѣйствованіи изъ пушекъ и

единороговъ производятся по большей части выстрѣлы, по предметамъ находящимся на горизонтѣ, или близъ горизонта орудія, и то подъ небольшими прицѣльными углами; а потому для практическаго употребленія весьма достаточно одного послѣдняго выраженія, найденнаго для t, которое сравнивъ съ прежнимъ изображающимъ также время, получимъ уравненіе

$$\sqrt{\frac{2xtgy}{g}} = \frac{e^{cx}-1}{ac},$$

которое по освобожденіи отъ корня приводится къ

$$\frac{2a^2c^2tgy}{g} = \frac{(e^{cx}-1)^2}{x} \ldots\ldots (k').$$

Хотя въ предшествующемъ уравненіи, изъ котораго сіе послѣднее выведено, количество x на первой сторонѣ знака равенства означаетъ разстояніе BM, а на второй кривую линію BoM полетомъ ядра описываемую, однако же отъ сего важной ошибки послѣдовать не можетъ, ибо какъ выше уже замѣчено, сіи двѣ линіи столь мало между собою разнствуютъ, что могутъ принимаемы быть одна за другую, особенно для практики, гдѣ случаются еще и большія разности.

§ 67. Въ уравненіи (k′), не зависящемъ отъ угла возвышенія орудія надъ горизонтомъ, что въ практикѣ во многихъ случаяхъ доставляетъ важную выгоду, заключаются всѣ величины, кои при дѣйствованіи изъ орудій прицѣльными выстрѣлами знать нужно; какъ-то, 1) уголъ прицѣливанія $= \gamma$; 2) начальная скорость бросаемаго ядра $= a$; 3) отстояніе предмета, въ который попасть должно $= x$. Къ сему должно прибавить еще; 4) высоту прицѣла, которая должна соотвѣтствовать данному или найденному углу прицѣливанія, и которая находится изъ уравненія $n = m \sin \gamma$ (§ 24) или для каждаго калибра орудій по таблицамъ § 27. Если изъ трехъ первыхъ величинъ извѣстны будутъ какія либо двѣ, то третія найдется посредствомъ уравненія (k′). Но видно, что изъ онаго довольно удобно выводятся величины a и $tg\ \gamma$, рѣшеніе же его въ отношеніи къ x соединено съ немалымъ затрудненіемъ; а потому постараемся преобразовать оное въ простѣйшее, не лишая при томъ искомыхъ выводовъ настоящаго ихъ значенія. Для сего возмемъ въ соображеніе рядъ для $e^{cx} = 1 + \frac{cx}{1} + \frac{c^2x^2}{1.2} +$

$\frac{c^3x^3}{1.2.3}+\ldots$, который даетъ $e^{cx}-1=cx+\frac{c^2x^2}{2}+\frac{c^3x^3}{1.2}+\ldots$ и

$$\frac{(e^{cx}-1)}{x}=c^2x+c^3x^2,$$

отбросивъ при семъ всѣ послѣдующіе члены, потому что степени количества c, составляющаго весьма малую дробь $=\frac{3\lambda D}{4kD'}=\frac{9.\ 0,0012}{20.\ kD'}$ (при $\lambda=\frac{3}{5}$), въ каждомъ членѣ больше степеней количества x, а слѣдовательно члены ряда весьма убываютъ и уменьшеніе сіе въ настоящемъ случаѣ тѣмъ чувствительнѣе, что здѣсь дѣло идетъ о чугунныхъ ядрахъ; но тогда будетъ $\frac{2c^2a^2tgv}{g}=c^2x+c^3x^2$, или

$$cx^2+x=\frac{2a^2tgv}{g} \ldots\ldots (I).$$

Вотъ самое простое уравненіе, которое представилъ Ломбаръ въ сочиненіи своемъ *Traité du mouvement des projectiles*, дабы безъ большаго труда изъ онаго можно было вывесть всѣ для произведенія выстрѣловъ изъ пушекъ и единороговъ нужныя величины, какъ-то:

1) Начальную скорость выстрѣливаемаго снаряда

$$a = \sqrt{\frac{gx(1+cx)}{2tgγ}} \quad \ldots\ldots (1).$$

2) Уголъ, составляемый линіею прицѣливанія съ осью канала орудія

$$tg\ γ = \frac{gx(1+cx)}{2a^2} \quad \ldots\ldots (2).$$

3) Дальность полета, каковыя при извѣстной скорости и при извѣстномъ углѣ прицѣливанія, послѣдовать должна

$$x = \frac{1}{2c}\left\{\sqrt{1+\frac{8a^2c\,tgγ}{g}} - 1\right\} \quad \ldots\ldots (3).$$

§ 68. Здѣсь предлагается нѣсколько практическихъ примѣровъ для предъидущихъ формулъ.

1) Сыскать начальную скорость 6 фунтоваго ядра, зная изъ опытовъ, что оно будучи брошено изъ 6-ти фунтовой пушки и съ зарядомъ въ 2 фунта пороха, при углѣ прицѣливанія въ 2 градуса попадаетъ въ предметъ, отстоящій отъ орудія на 378 саженъ или на 2646 Ф. (*). Мы имѣемъ въ семъ примѣрѣ $x = 2646$, $γ = 2°$,

(*) Смотри таблицы объ выстрѣлахъ нашихъ орудій, составленныя изъ среднихъ дальностей полетовъ, оказавшихся при опытахъ Военнымъ Ученымъ Комитетомъ произведенныхъ, и помѣщенныя въ книгѣ: Основанія Артиллерійской и Навтонной науки, часть II § 77, откуда для примѣровъ заимствованы здѣсь данныя величины.

$Lc = L.\frac{90}{20kD'} = 6{,}3969495 - 10$ (§ 55 табл.) и $c = 0{,}0002494$3: вычисляя теперь формулу $a = \sqrt{\frac{gx(1+cx)}{2tg\,\gamma}}$ по логарифмамъ, будетъ

$L(1+cx) = 0{,}2201063$
$Lx = 3{,}4225898$
$L\frac{g}{2} = 1{,}2070147$
Аріѳм. допол. $L\,tg\,\gamma = 1{,}4569162$

$L.\,a^2 = 6{,}3066270$ и $La = 3{,}1533135$
$= L(1423{,}4)$;

слѣдовательно начальная скорость 6-ти фунтоваго ядра, брошеннаго изъ 6-ти фунтовой пушки съ зарядомъ въ 2 фунта пороха, составляетъ около 1425 футъ въ секунду.

2) Вычислить на какое разстояніе полетитъ 6-ти фунтовое ядро съ начальною скоростію въ 1425 фута въ секунду, при углѣ прицѣливанія въ 4 градуса. Уравнивъ $a = 1425$, $\gamma = 4'$ и вычисляя формулу $x = \frac{1}{2c}\left\{\sqrt{\frac{8a^2c}{g}tg\gamma + 1} - 1\right\}$ по логарифмамъ, будемъ имѣть по порядку

$L\left(\frac{8a^2c}{g}.\,tg\gamma\right) = 0{,}9430483$ и $\frac{8a^2c}{g}.\,tg\,\gamma = 8{,}77098$;

слѣдовательно $\frac{8a^2c}{g}.\,tg\gamma + 1 = 9{,}77098$; $\sqrt{9{,}77098} = 3{,}12586$ и $\sqrt{9{,}77098} - 1 = 2{,}12586$. Но,

$$\left.\begin{array}{l} L\,(2{,}12586) = \;\; 0{,}3275346 \\ -L2c = -6{,}6979795+10 \end{array}\right\}$$

отсюда $Lx = 3{,}6295551$ и $x = 4261{,}4$ фут; почти $= 609$ саженъ; такова искомая дальность полета ядра.

Подобнымъ образомъ найдется разстояніе $= 792$ саженямъ (по опытамъ $= 786$), на которое должно полетѣть 6-ти фунтовое ядро съ такою же начальною скоростію, при углѣ прицѣливанія въ 6 градусовъ; и разстояніе $= 949$ саженъ (по опытамъ $= 901$), на которое оно полетитъ при углѣ прицѣливанія въ 8 градусовъ.

3) Ядро 12-ти фунтовое, брошенное изъ 12 фунтовой пушки съ зарядомъ въ 4 фунта пороха, при углѣ прицѣливанія въ 2 градуса, упадаетъ отъ орудія на разстояніи 397 саженъ или 2779 футъ; отыскать начальную онаго скорость? Поелику $x = 2779$, $y = 2°$ и $Lc = L\left(\frac{9\ D}{20kD'}\right) = 6{,}2965628-10$ (§ 55 таб.), то по формулѣ $a = \sqrt{\frac{gx\,(1+cx)}{2fg\,y}}$ найдется начальная скорость 12-ти фунтоваго ядра $= 1409{,}6$ фута въ секунду.

4) Требуется найти высоту прицѣла и при-

цѣлный уголъ, подъ которымъ 12-ти-фунтовое ядро, бросаемое изъ 12-ти-фунтовой пушки, со скоростію 1410 футъ въ секунду, упало бы отъ орудія на разстояніи 630 саженъ или 4410 футъ.

Поелику въ семъ примѣрѣ $x=4410$, $a=1410$ и при томъ $Lc=6{,}2965628-10$, то взявъ для опредѣленія угла γ формулу $tg\,\gamma=\frac{gx(1+cx)}{2a^2}$, будемъ имѣть по правилу логарифмическаго вычисленія

$$Lcx=9{,}9410014-10,\quad -cx=0{,}872974;$$

потомъ

$$\left.\begin{array}{rcl} L(1+cx) & = & 0{,}2725317 \\ Lx & = & 3{,}6444386 \\ L\frac{g}{2} & = & 4{,}2070147 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{сумма} \ldots & & 5{,}1239850 \\ -L(a^2) & = & -6{,}2984382 \end{array}\right\}$$

$$Ltg\,\gamma = 8{,}8255468-10,$$

отсюда получится прицѣльный уголъ $\gamma=3^\circ$ 49′42″, послѣ чего, или чрезъ уравненіе $n=m\sin\gamma$ или помощію таблицы III (§ 27), найдется соотвѣтствующія сему углу высота прицѣла $n=5{,}393$ дюйма.

§ 69. Сихъ примѣровъ довольно, чтобы видѣть какъ поступать должно при рѣшеніи всѣхъ случаевъ, могущихъ встрѣтиться при обыкновенномъ дѣйствованіи изъ пушекъ, а также единороговъ подъ небольшими прицѣльными углами; и въ семъ отношеніи можно для каждаго калибра орудія, при употребленіи извѣстнаго сорта пороха, составить таблицы. Для сего если неизвѣстна еще начальная скорость бросаемаго снаряда, то подъ опредѣленнымъ угломъ прицѣливанія, для котораго извѣстна будетъ и высота прицѣла, сдѣлавъ нѣсколько пробныхъ выстрѣловъ и взявъ изъ нихъ среднюю дальность полета, надлежитъ сперва по формулѣ (1) § 67 отыскать сію скорость, а потомъ по формуламъ (3) § 67 и (b′) § 53, для каждаго угла прицѣливанія или высоты прицѣла найти соотвѣтствующую дальность и время полета ядра, а по формулѣ (z) или (a′) § 51 и § 53 скорость его паденія, и найденныя выводы разставить въ надлежащемъ порядкѣ. Составивъ такимъ образомъ таблицы и сверхъ ихъ съ настоящими выстрѣлами нарочно для сего произведенными, увидимъ достаточное согласіе между Теоріею и практи-

кою, если только опыты произведены будутъ со всевозможнымъ тщаніемъ, какое необходимо требуется для вѣрности выстрѣловъ.

§ 70. Припомнимъ себѣ сказанное въ § 66, что если предметъ, въ который стрѣляютъ, не на самомъ горизонтѣ находится, но нѣсколько выше или ниже онаго, такъ чтобы уголъ α по своей малости могъ быть пренебреженъ, тогда найденныя предъ симъ формулы (k′) и (l′) столь же будутъ справедливы въ послѣднемъ случаѣ, какъ и въ первомъ, который даетъ $\theta = \gamma$. Но дабы въ разсужденіи сего не оставалось какого либо сомнѣнія, то вновь рѣшимъ выше представленный 4-й примѣръ вычисленія формулы $tg\gamma = \frac{gx(1+cx)}{2a^2}$, присовокупляя къ нему то условіе, дабы предметъ возвышенъ былъ на 30 футъ отъ горизонта орудія. Величина 8,8255468, найденная въ семъ примѣрѣ для $Ltg\gamma$, будетъ въ настоящемъ случаѣ величина выраженія $L\left(\frac{sin\gamma'}{cos(\alpha+\gamma')}\right)$, въ которомъ количество γ' означаетъ искомый уголъ прицѣливанія, различный отъ γ; ибо вмѣсто уравненія $t = \sqrt{\frac{2x}{g}} \cdot tg\gamma$, по замѣчанію сдѣланному въ § 66,

удержать должно уравненіе $t = \sqrt{\frac{2x.\ sin\gamma'}{g\ cos\gamma}}$ или $t = \sqrt{\frac{2x\ sin\gamma'}{g\ cos(\alpha+\gamma')}}$, которое по сравненіи съ уравненіемъ $t = \frac{e^{cx}-1}{ae}$ даетъ формулы таковыя же, какъ и предъ симъ выведенныя, съ тою только разностію, что въ нихъ вмѣсто множителя $tg\gamma$ заключаться будетъ $\frac{sin\gamma'}{cos(\alpha+\gamma')}$. Итакъ получимъ

$$\frac{sin\gamma'}{cos(\alpha+\gamma')} = \frac{gx(1+cx)}{2a^2} \text{ или } = tg\gamma$$

и

$$L\left(\frac{sin\gamma'}{cos(\alpha+\gamma')}\right) = Ltg\gamma = 8{,}8255468 \text{ (4 прим.)}; \text{ но,}$$

$$\frac{sin\gamma'}{cos(\alpha+\gamma')} = \frac{tg\gamma'}{cos\alpha+sin\alpha\ tg\gamma'} = tg\gamma,$$

отсюда найдется

$$tg\gamma' = \frac{cos\,\alpha.\ tg\gamma}{1-sin\alpha\ tg\gamma} \text{ и } L\,tg\gamma' = Lcos\alpha + Ltg\gamma + \text{ар.доп. L}(1-sin\alpha tg\gamma).$$

Замѣтимъ теперь, что относительно угла MBP возвышенія мѣстности, который равенъ α, имѣемъ $sin\alpha = \frac{PM}{BM} = \frac{30}{4410}$, $Lsin\alpha = 7{,}8326827-10$, $\alpha = 23'23''$ и $Lgcos\,\alpha = 9{,}9999900-10$, то найдется

$L(sin\alpha tg\gamma) = Lsin\alpha + Ltg\gamma = 6{,}6582296 - 10$

$sin\alpha tg\gamma = 0{,}0004552{,}1 - sin\alpha tg\gamma = 0{,}9995448$,

ариѳм. доп. $L(1 - sin\alpha . tg\gamma) = 0{,}0001977$; слѣдовательно будемъ имѣть $Ltg\gamma' = 8{,}8257345 - 10$ и уголъ $\gamma' = 3°49'48''$, который весьма мало различается отъ прежняго угла прицѣливанія $\gamma = 3°49'42''$, при опредѣленіи коего не принималось въ уваженіе возвышеніе предмета надъ горизонтомъ орудія. Зная уголъ γ', мы найдемъ по формулѣ (§ 22) $n' = \frac{m\ sin\ \gamma'}{cos(\theta - \gamma')} = \frac{msin\gamma'}{cos\alpha}$ или изъ таблицы III (§ 27), высоту прицѣла ему соотвѣтственную $n' = 5{,}395$ дюйма, которая разнствуетъ отъ найденной въ прежнемъ примѣрѣ на 0,002 дюйма; разность совершенно ничтожная, могущая причинить погрѣшность несравненно меньшую, противу обыкновенныхъ практическихъ ошибокъ.

§ 71. Если въ 1-мъ примѣрѣ вычисленія формулы $a = \sqrt{\frac{gx(1 + cx)}{2gty}}$ предположимъ, что предметъ находится на высотѣ 50 футъ отъ горизонта орудія, то поставивъ въ ней выраженіе $\frac{sin\gamma}{cos(\alpha + \gamma)}$ на мѣсто $tg\ \gamma$, будемъ имѣть

$$a' = \sqrt{\frac{gx(1+cx)\cos(\alpha+\gamma)}{2\sin\gamma}}$$

и

$$\mathrm{L}a' = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{L}(16{,}107) + \mathrm{L}x + \mathrm{L}(1+cx) + \text{Ариѳ. допол.}\mathrm{L}\frac{\sin\gamma}{\cos(\alpha+\gamma)}\right\}.$$

Но для опредѣленія угла мѣстности α, имѣемъ $\sin\alpha = \frac{50}{2646}$ и $\mathrm{L}\sin\alpha = 8{,}2763802 - 10$; то отсюда получится $\alpha = 1^\circ 3' 58''$ и Ариѳмет. допол. $\mathrm{L}\frac{\sin\gamma}{\cos(\alpha+\gamma)}$ или Ариѳ. допол. $\mathrm{L}\left(\frac{\sin 2^\circ}{\cos(3^\circ 3' 58'')}\right) = 1{,}4565478$. Послѣ чего не трудно будетъ найти $\mathrm{L}a' = 3{,}1531293$ и начальную скорость $a' = 1422{,}7$ фута, которая различается отъ прежде выведенной $a = 1423{,}4$ на 0,7 фута: разность не стоющая того, чтобы принимать оную во уваженіе.

Наконецъ, когда во 2-мъ примѣрѣ третьей формулы сверхъ данныхъ величинъ $a = 1423$ и $\gamma = 4^\circ$ предполагаемъ извѣстнымъ и уголъ мѣстности МВР $= \alpha = 8^\circ$, тогда для опредѣленія отстоянія обстрѣливаемаго предмета должно взять формулу

$$x' = \frac{1}{2c}\left\{\sqrt{\frac{8a^2c}{g}\cdot\frac{\sin\gamma}{\cos(\alpha+\gamma)} + 1} - 1\right\},$$

по которой найдется $\mathrm{L}x = 3{,}0351816$ и $x =$

4317 футъ=617 саженъ, что различается отъ прежняго вывода 609 саженъ количествомъ=8 саженямъ; но сіи разность во многихъ случаяхъ дѣйствительной стрѣльбы бываетъ терпима.

Изъ сравненія послѣднихъ выводовъ съ прежними ясно видно, что если линія прицѣливанія будетъ не горизонтальна, но немного возвышена или наклонена отъ горизонта, тогда безъ опасенія можно руководствоваться прежними легкими формулами; ибо безполезно было бы жертвовать простымъ вычисленіемъ для снискапія чрезъ болѣе сложныя выкладки такой точности, каковой мы и въ самой практикѣ никогда не встрѣтимъ.

§ 72. Въ предъидущихъ вычисленіяхъ вездѣ мы принимали прицѣльный уголъ GHI или BCH, составляемый линіею прицѣливанія IHM съ осью орудія, равнымъ углу CBM, который та же ось составляетъ съ линіею BM, проведенною отъ жерла орудія къ предмету, то есть, предполагали $\gamma = \theta - \alpha$: ибо хотя истинная онаго величина равна $< CBM + < BMH$ или $= \theta - \alpha + < BMH$, однако же уголъ BMH по отдаленности предмета бываетъ столь малъ, что онъ не перемѣняетъ величины угла $\gamma = \theta - \alpha$

вѣ той степени, дабы отъ того и величины предъидущихъ выраженій примѣтно могли измѣниться. А чтобы имѣть нѣкоторое понятіе о величинѣ сего угла BMH, то возмемъ въ разсмотрѣніе самый невыгодный случай, предполагая, что разстояніе BM=100 саженъ=700 футъ и притомъ перпендикулярное къ BH. Если пушка будетъ 12-ти-фунтовая, то получимъ $tg\text{BMH}=\frac{\text{BH}}{\text{BM}}=\frac{0{,}5679}{700}$ фута и по логариѳмамъ найдется $<\text{BMH}=2'47''$, сей уголъ при большемъ разстояніи BM и при наклонномъ положеніи орудія гораздо менѣе выходитъ.

Вычисленіе отлогихъ рикошетныхъ выстрѣловъ въ сопротивляющемся воздухѣ (*).

§ 73. Поелику при отлогихъ рикошетныхъ выстрѣлахъ путь снаряда не слишкомъ много разнится отъ прямыхъ отстояній рикошетируемыхъ предметовъ, то формулы, выведенныя выше для прицѣльныхъ выстрѣловъ, могутъ быть приложены и къ симъ рикошетнымъ,

(*) Касательно предѣловъ, отдѣляющихъ крутые рикошетные выстрѣлы отъ отлогихъ, а также условій для угла возвышенія, величины заряда и проч. смотри: Записки объ Артиллерійскомъ искуствѣ Г. Весселя, Часть II. стран 45—60.

бравъ за предметъ верхнюю точку гребня бруствера, съ которой ядро должно быть перенесено. Но между тѣмъ надлежитъ замѣтить, что ядро тѣмъ болѣе вреда наноситъ непріятелю, чѣмъ оно, вдоль линіи укрѣпленія, быстрѣе мчится по дугѣ мало возвышенной надъ валгангомъ. Ибо пусть RH (фиг. 13) будетъ валгангъ фаса бастіона; C вершина бруствера; MCN кривая описываемая ядромъ: если верхъ C бруствера есть точка нисходящей вѣтви сей кривой, то очевидно, что ядро, пробѣгая часть CN можетъ встрѣтить всѣ предметы, находящіеся на валгангѣ RH, коихъ высота меньше будетъ возвышенія CR бруствера надъ онымъ, и что оно поразитъ ихъ тѣмъ сильнѣе, чѣмъ путь CN будетъ менѣе кривъ, длиннѣе и точка паденія N отдаленнѣе отъ бруствера; слѣдовательно, какъ скоро сіи условія будутъ исполнены, то непріятель потерпитъ сильное пораженіе, даже и безъ тѣхъ рикошетовъ, которые ядра производятъ послѣ перваго паденія. Для достиженія же сего, надобно умѣть сообщить ядру такую скорость, чтобы оно, будучи брошено изъ батареи, построенной на данномъ разстояніи, перенеслось за бруствер, совер-

шая уже опускающуюся вѣтвь полета своего. Скорость сія можетъ быть или на удачу взята или опредѣлена изъ уравненія $a = \frac{e^{cx} - 1}{ct}$ (§ 53), зная по предварительнымъ наблюденіямъ то время, которое ядро употребляетъ на совершеніе своего полета отъ батареи до брустверa, гдѣ оно должно продолжать движеніе свое по опускающейся вѣтви. Но какъ первое средство не весьма надежно; то лучше употребить послѣднее, по которому, когда отыщемъ скорость и прицѣльный уголъ, не трудно будетъ тогда, по соображенію, выбрать удобнѣйшую скорость для рикошетированія. Ломбаръ въ своей Теоріи рикошетныхъ выстрѣловъ, основываясь на опытахъ, принимаетъ за начало вычисленій, что когда пушка поставлена во 150 туазахъ отъ брустверa, тогда ядро употребляетъ 2 секунды времени на пробѣжаніе сего разстоянія, и проходя чрезъ брустверъ описываетъ уже опускающуюся вѣтвь; то же происходитъ съ ядромъ въ 200 туазахъ разстоянія чрезъ $2\frac{1}{5}$ секунды, въ 250 туазахъ чрезъ $2\frac{3}{5}$ секунды, въ 300 туазахъ чрезъ 3 почти секунды. Сіи практическія положенія если и не

совершенно точны, однако же могутъ руководствовать насъ въ нашихъ разысканіяхъ.

§ 74. Положимъ, для примѣра, что батарея заложена во 150 саженяхъ отъ бруствера и что 24-хъ фунтовому ядру потребно 2 секунды времени для пробѣжанія сего разстолнія. По симъ даннымъ начальная скорость 24-хъ фунтоваго ядра найдется по формулѣ $a = \frac{e^{cx} - 1}{ct}$, въ которой $t = 2$, $x = 1050$ футъ, $Lc = L\left(\frac{9D}{20kD'}\right) = 6{,}1941293 - 10$ (§ 55 табл.); слѣдовательно начальная скорость 24-хъ фунтоваго ядра $a = 570{,}5$ фута. Теперь чтобы отыскать высоту прицѣла для даннаго разстоянія $= 150$ саженъ, прицѣливая при чемъ орудіе въ верхнюю точку гребня бруствера, то изъ уравненія $tg\, \gamma = \frac{gx(1+cx)}{2a^2}$ или точнѣе изъ уравненія $tg\, \gamma = \frac{g}{2x}\left(\frac{e^{cx}-1}{ac}\right)^2 = \frac{g}{2} \cdot \frac{t^2}{x}$ (§ 66 и 67) сначала будемъ имѣть прицѣльный уголъ $\gamma = 3^\circ\ 30'\ 40''$, послѣ чего, посредствомъ формулы $n = m \sin \gamma$ или помощію таблицы I (§ 27), получимъ и высоту прицѣла $n = 7{,}788$ дюйма. Но если вы-

численная сія высота окажется болѣе всей высоты употребляемаго прицѣла, то въ такомъ случаѣ должно посредствомъ квадранта возвысить орудіе отъ горизонтальнаго направленія на число градусовъ, которое находится присоединяя къ выше найденному углу прицѣливанія еще уголъ, составляемый горизонтомъ батареи съ линіею проведенною отъ дула орудія къ верхней точкѣ гребня бруствера (§ 25); величину послѣдняго угла практически найти не трудно по устроенію нашихъ орудій. Положимъ, что верхъ бруствера возвышенъ на 30 футъ отъ горизонта батареи, то на разстояніи 150 саженъ сей уголъ будетъ $\alpha = 1^\circ\, 38'\, 12''$, а уголъ возвышенія орудія $\theta = \gamma + \alpha = 5^\circ\, 8'\, 52''$. Симъ образомъ для анфилированія укрѣпленія 24-хъ фунтовою пушкою, поставленною во 150 саженяхъ отъ бруствера, надлежитъ чтобы ядро брошено было съ начальною скоростію въ 570 футъ въ секунду, возвысивъ при чемъ орудіе въ отношеніи къ горизонту на $5^\circ\, 8'\, 52''$. Разумѣется, что батарея должна быть расположена по линіи перпендикулярной къ продолженію анфилируемаго фаса. Стрѣляя такимъ образомъ, ядро пролетѣвъ чрезъ брустверъ неми-

нуемо продолжать будетъ свой полетъ нисходящею отраслью и произведетъ полное дѣйствіе, какое только отъ онаго можно ожидать, даже не бравъ во уваженіе его рикошетовъ.

§ 75. Хотя по прежнимъ формуламъ не возможно отличить восходящей вѣтви отъ нисходящей, однако весьма простымъ вычисленіемъ удостовѣриться можно, что полетъ ядра у верхней точки гребня бруствера есть склоняющійся къ валгангу; а также узнать и то разстояніе, на которомъ ядро отъ боковаго бруствера упадаетъ на валгангъ. Для сего проведемъ отъ жерла A (фиг. 14) пушки горизонтальную плоскость AB, и примемъ, что верхъ C бруствера возвышенъ на 30 футъ отъ сей плоскости. Поелику время полета ядра отъ A къ C составляетъ двѣ секунды, то сей снарядъ достигши точки *o*, уклонится внизъ на 4.16,107, или 64,43 фута отъ первоначальнаго своего направленія; слѣдовательно отложивъ вертикальную линію CF=64,43 фута и проведя линію AF, сія послѣдняя покажетъ направленіе, по которому ядро вылетаетъ изъ пушки, а *tg* FAB $= \frac{FB}{AB} = \frac{94,43}{1050}$ опредѣлитъ уголъ возвышенія

орудія $\theta = 5^{\circ}\ 8'\ 20''$ тотъ же самый, который предъ симъ былъ выведенъ изъ угла прицѣливанія. Проведемъ теперь прямую линію AC и положимъ, что ядро находится въ точкѣ h, отъ которой остается ему до верха брустверa пробѣжать 20 саженъ: проведемъ также вертикальную линію $mhnd$, то будемъ имѣть AC : An, или 150 : 130 = BF : dm; но BC = 30 и BF = BC + CF = 30 + 64, 43 = 94,43 фута, слѣдовательно получится dm = 81,84 фута. А чтобъ получить mh, то во первыхъ сыщемъ время употребляемое ядромъ на пробѣжаніе пространства Ah = 130 саженъ или 910 футъ съ начальною скоростію въ 570,5 фута, по формулѣ $t = \frac{e^{cx} - 1}{ac}$, найдется логариѳмъ сего времени = 0,2340510: но извѣстно изъ основаній Динамики, что если квадратъ времени умножить на 16,107 фута, то получится высота, съ которой тяжелое тѣло упадаетъ въ сіе время; слѣдовательно прибавляя L(16,107) къ удвоенному найденному логариѳму 0,2340510, получится 1,6751167 для логариѳма высоты mh, которая будетъ = 47,33 фута, вычтя же оную изъ md = 81,84 фута, будемъ имѣть hd = 34,51 фута. Изъ сего видно,

что точка *k* есть выше, нежели *c* на 4,5 фута, и что ядро склоняется внизъ отъ *k* къ *c*. Изслѣдуемъ еще положеніе H, движущагося ядра въ разстояніи на 20 саженъ за брустверомъ, и проведемъ на семъ разстояніи вертикальную линію MNHD, которая встрѣчаетъ продолженныя прямыя AF и AC въ точкахъ M и N; будемъ имѣть тогда AC: AN или 150 : 170 = BF : DM = 107,02 фута. А чтобы узнать высоту MH, на которую ядро при достиженіи къ H опускается внизъ отъ перваго своего направленія AM, то должно, какъ и выше, сначала сыскать время употребляемое онымъ для пробѣжанія пространства AH = 170 саженъ или 1190 футъ, съ прежнею начальною скоростію въ 570,5 фута: логарифмъ сего времени будетъ = 0,3603084, къ удвоенному сему логарифму, присоединя L(16,107), получимъ 1,9276315 для логарифма высоты MH, которая и будетъ = 84,65 фута; вычтя оную изъ MD = 107,02 фута, найдется HD = 22, 37 фута. И такъ если положимъ, что валгангъ RH ниже верхней точки гребня бруствера на 7 футъ, то въ семъ случаѣ будетъ RB = 23 футамъ, а слѣдовательно ядро упадетъ на валгангъ въ разстояніи

отъ бруствера нѣсколько меньшемъ, нежели 20 саженъ. Сіе разстояніе приближительно найдется равнымъ $18\frac{1}{3}$ сажени, по пропорціи CB—DH : CR=RH : RI или 7,63 : 7=20 : 18,35. На семъ-то удаленіи ядро сдѣлаетъ рикошетъ и поднимется на большую или меньшую высоту, по мѣрѣ того, какъ въ точкѣ паденія отражающая поверхность будетъ наклонена въ задъ или впередъ; можетъ оно отражаясь уклониться въ право или въ лѣво, если земля будетъ поката въ ту или другую сторону. Но при всѣхъ таковыхъ отраженіяхъ весьма возможно, что ядро перенесено будетъ чрезъ предметы, которые имъ были бы опрокинуты, если бы кривая была длиннѣе или если бы первая точка паденія была отдаленнѣе отъ боковаго бруствера. Но для сего требуется, чтобы начальная скорость ядра увеличена была; примѣрно, пусть сія скорость будетъ въ 700 футъ вмѣсто 510; давъ постоянно разстояніе AC=250 саженъ или 1050 футъ и высоту CB бруствера=30 футъ, найдемъ по формулѣ $t = \frac{e^{cx} - 1}{ac}$ время употребляемое ядромъ на совершеніе пути AC, равное 1,6501 секунды; сіе

время покажетъ намъ вертикальную линію CF, содержащуюся между вершиною C бруствера и первоначальнымъ направленіемъ AF ядра, которая=42,80 фута и даетъ BF=72,80 фута. Послѣ чего чрезъ уравненіе $tg\theta = \frac{BF}{AB} = \frac{72,8}{1050}$, получимъ уголъ возвышенія орудія $\theta = 3°57'58''$, высота же прицѣла найдется равною 5,17 дюйма. А дабы увѣриться теперь, что ядро при переходѣ своемъ чрезъ точку C склоняется внизъ, то разсмотримъ вертикальную *md*, взятую на разстояніи 10 саженъ отъ BF; произведя вычисленіе по прежнему, найдемъ *hd*=30,08 фута, сіе показываетъ, что ядро дѣйствительно склоняется внизъ отъ *h* къ C. Потомъ, взявъ вертикальную DM на разстояніи 32 саж. отъ бруствера, подобнымъ образомъ, какъ выше опредѣлимъ ординату DH почти равную 23 футамъ; сіе показываетъ, что ядро упадаетъ на валгангъ въ разстояніи 32 саженъ отъ боковаго бруствера, и слѣдовательно можетъ произвесть лучшее противъ прежняго дѣйствіе. А если бы понадобилось еще болѣе усилить начальную скорость, или умѣньшить оную, смотря по протяженію валганга и по дѣйствію, которое

назначается ядру произвесть, то по предъидущимъ показаніямъ сдѣлать сіе не трудно.

§ 76. Приведемъ рѣшеніе вопросовъ относительно рикошетной стрѣльбы во всеобщность, и означимъ координаты Ad и hd, какой ни есть точки кривой линіи полета чрезъ x' и y', а уголъ бросанія ядра mAd чрезъ θ; то будемъ имѣть очевидно $dh = md - mh$ или $y' = x'tg\theta - \frac{1}{2}gt^2$. Но по предъидущему $t = \frac{e^{cx'} - 1}{ao}$, слѣдовательно уравненіе между координатами точекъ пути ядра будетъ

$$y' = x'tg\theta - \frac{1}{2}g\left(\frac{e^{cx'} - 1}{ao}\right)^2 \ldots\ldots(1);$$

отсюда по взятіи дифференціала, отношеніе $\frac{dy'}{dx'} = tg\theta - \frac{g}{a^2c}e^{cx'}(e^{cx'} - 1)$; даетъ тангенсъ угла наклоненія кривой въ точкѣ h къ горизонту. Если сдѣлаемъ сей уголъ равнымъ нулю, то составится уравненіе.

$$e^{2cx'} - e^{cx'} = \frac{a^2ctg\theta}{g} \ldots\ldots(2),$$

изъ котораго опредѣлится горизонтальное разстояніе самой высшей точки полета ядра.

$$x' = \frac{1}{cLe}L\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a^2ctg\theta}{g}}\right),$$

а потомъ посредствомъ уравненія (1) и верти-

кальное возвышеніе сей точки. Но если тотъ же уголъ предположимъ равнымъ углу θ' паденія ядра въ точкѣ I на валгангѣ, то для опредѣленія онаго будемъ имѣть уравненіе

$$tg\theta' = tg\theta - \frac{g}{a^2c^2}\, e^{cx''}\,(e^{cx''}-1).....(3),$$

въ которомъ количество $x'' = AI$. Кромѣ сихъ уравненій получимъ относительно верхней точки C гребня брустверa и точки I паденія ядра еще слѣдующія

$$y = xtg\theta - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{e^{cx}-1}{ac}\right)^2.....(4)$$

и

$$y'' = x''tg\theta - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{e^{cx''}-1}{ac}\right)^2.....(5),$$

къ коимъ должно присоединить уравненіе $v = \frac{a}{e^{cx}}$ (§ 52) для опредѣленія той скорости, которую ядро имѣетъ позади брустверa спускаясь къ валгангу. И такъ посредствомъ предъидущихъ уравненій можно рѣшить всѣ задачи, относительно рикошетной стрѣльбы. Въ вышепредставленномъ вопросѣ, предполагающемъ $t = 2''$ и $x = 1050$ футъ, какъ скоро найдены будутъ начальная скорость $a = \frac{e^{cx}-1}{ct} = 570$ футъ и уголъ возвышенія $\theta' = 5°8'20''$ изъ уравненія

(4), которое даетъ $tg\theta = \frac{y + \frac{1}{2}gt^2}{x}$, то посредствомъ уравненія (2), получимъ горизонтальное разстояніе самой возвышенной точки полета ядра $x' = \frac{1}{cLe} L\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a^2 ctg\theta}{g}}\right) = 759{,}8$ фута или 108,5 сажени; слѣдовательно сія точка находится въ $41\frac{1}{2}$ сажени отъ бруствера и возвышена отъ горизонта на 36 футъ. Послѣ чего, когда изъ уравненія (5), въ коемъ $y'' = BR = 23$ футамъ, сыщемъ $x'' = AI = 18{,}35$ сажени, что не иначе сдѣлается какъ по правилу ложнаго положенія; тогда чрезъ уравненіе (3) опредѣлится и величина угла паденія ядра на валгангѣ $\theta' = 3^\circ 40'$; скорость же паденія сего снаряда будетъ $v = \frac{a}{e^{cx''}} = 474$ футамъ въ секунду.

§ 77. Чтобы показать дальнѣйшее употребленіе предъидущихъ формулъ, то приложимъ ихъ къ рѣшенію еще слѣдующихъ задачъ.

1) Зная разстояніе AB отъ батареи до бруствера, высоту CB верхней точки гребня бруствера; высоту BR валганга; и принявъ разстояніе AD самой возвышенной точки пути ядра

произвольнымъ, однако же большимъ чѣмъ половина разстоянія AB: найти уголъ и скорость бросанія, разстояніе AI точки паденія и уголъ паденія снаряда.

Въ сей задачѣ извѣстны величины x, y, y'' и x', а должно сыскать θ, a, x'' и θ'. Но сдѣлавъ для краткости $e^{cx'}(e^{cx'}-1)=\beta$ и взявъ въ разсмотрѣніе уравненія (2) и (4), заключающія въ себѣ искомыя двѣ величины a и $tg\ \theta$, получимъ изъ оныхъ

$$tg\,\theta=\frac{y}{x-\frac{(e^{cx}-1)^2}{2c\beta}},\quad \text{и}\quad a=\sqrt{\frac{g\beta}{ctg\theta}};$$

то есть извѣстны будутъ уголъ возвышенія орудія и начальная скорость ядра. Послѣ сего, по правилу ложнаго положенія, изъ уравненія (5) найдется разстояніе x'', опредѣляющее точку паденія снаряда на валгангѣ; и посредствомъ уравненія (3) извѣстенъ будетъ и уголъ паденія θ'.

Для примѣра, положимъ, что разстояніе AB$=$ $x=150$ саженъ или 1050 футъ, высота брустверa BC$=y=50$ футъ, высота валганга BR$=$ $y''=25$ фута; и сверхъ того примемъ, что разстояніе самой возвышенной точки пути ядра $x'=\frac{2}{3}x=700$ футъ. Вставивъ сіи числа въ вы-

шеприведенныя формулы, получимъ въ отношеніи къ 24-мъ фунтовому ядру; 1) уголъ возвышенія орудія $\theta = 6^\circ\ 33'\ 7''$ (по параболической теоріи найденъ $= 6^\circ\ 31'\ 11''$, § 30); 2) начальную скорость ядра $a = 481$ футъ въ секунду (по параб. теоріи $= 447$ футъ); 3) разстояніе $x'' - x = 12$ саженъ, на которомъ ядро упадаетъ на валгангъ отъ боковаго бруствера (по параб. теоріи $= 15$ саженъ); 4 уголъ паденія $\theta' = 5^\circ\ 29'$ (по параб. теоріи $= 4^\circ\ 15'\ 39''$); 5) наибольшее восхожденіе ядра $y' = 42$ фута (по параб. теоріи $= 40$ футъ) и 6) скорость паденія ядра на валгангѣ $v = 403$ фута.

2) Зная разстояніе $AB = x$, высоту бруствера $BC = y$, высоту валганга $BR = y''$ и разстояніе $RI = x'' - x$ точки паденія ядра; найти уголъ бросанія $= \theta$, уголъ паденія $= \theta'$ и начальную скорость ядра $= a$. Уравненіе (4) и (5), представленныя въ видѣ

$$x\,tg\theta - y = \tfrac{1}{2}g\left(\frac{e^{cx}-1}{ac}\right)^2 \text{ и } x''\,tg\theta - y'' = \tfrac{1}{2}g\left(\frac{e^{cx}-1}{ac}\right)^2,$$

будучи раздѣлены другъ на друга даютъ

$$\frac{x''\,tg\theta - y''}{x\,tg\theta - y} = \left(\frac{e^{cx''}-1}{e^{cx}-1}\right)^2;$$

но сдѣлавъ для краткости $\left(\frac{e^{cx''}-1}{e^{cx}-1}\right)^{\frac{1}{c}}=\lambda$, то отсюда найдется

$$tg\theta=\frac{\lambda y-y''}{\lambda x-x''},$$

и слѣдовательно по логарифмамъ уголъ θ возвышенія орудія. Послѣ чего изъ уравненія (4) получится начальная скорость.

$$a=\frac{e^{cx}-1}{c}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}g}{xtg\theta-y}};$$

уравненіе же (3) дастъ уголъ паденія θ'. Горизонтальное и вертикальное разстояніе наибольшаго восхожденія ядра, найдены будутъ посредствомъ уравненій (1) и (2).

Для примѣра положимъ, что батарея заложена на разстояніи 250 саженъ или 1750 футъ, и что должно бросить 24-хъ-фунтовое ядро изъ орудія такъ, дабы оно пролетѣло чрезъ верхъ бруствера, возвышеннаго на 60 футъ отъ горизонта орудія, и упало на валгангъ въ разстояніи отъ боковаго бруствера на 20 саженъ или 140 футъ, полагая при семъ высоту валганга въ 55 фута.

Въ семъ вопросѣ имѣемъ $x=1750$, $y=60$, $x''=1890$, $y''=55$; и по симъ данымъ най-

дется уголъ возвышенія $\theta = 5°21'13''$, начальная скорость 24-хъ-фунтоваго ядра $a = 792$ фута въ секунду, уголъ паденія онаго $\theta = 3°19'7''$, скорость паденія $v = 589{,}5$ фута, горизонтальное разстояніе самой возвышенной точки пути ядра $x' = 1333$ фута и вертикальное разстояніе сей точки $y' = 68{,}5$ или почти $= 10$ саженъ.

О навѣсныхъ выстрѣлахъ.

I. *Выводъ общихъ формулъ для вычисленія навѣсныхъ выстрѣловъ.*

§ 78. Показанный предъ симъ способъ вычисленія всѣхъ обстоятельствъ относительно прицѣльныхъ и рикошетныхъ выстрѣловъ, не можетъ быть приложенъ къ навѣснымъ выстрѣламъ; то есть, къ такимъ, при коихъ брошенный снарядъ поднимается весьма высоко вверхъ, какъ-то обыкновенно бываетъ при бросаніи бомбъ изъ мортиръ; потому что тогда кривая линія полетомъ снаряда описываемая, столь много различается отъ прямаго отстоянія дула орудія до предмета, въ который стрѣляютъ, что никакъ не можно принять объ сіи линіи за равныя или почти равныя, какъ-то принято было при вышеупомянутыхъ вычи-

сленіяхъ. А потому мы постараемся вывесть новыя формулы, которыя могли бы быть употреблены и для сего рода выстрѣловъ. Хотя въ семъ отношеніи открыты разные способы отличнѣйшими при томъ Геометрами, но по большей части они имѣютъ тотъ недостатокъ, что весьма сложны и для практическаго употребленія не удобны. Лучшій же способъ вычисленій сихъ предложилъ знаменитый Эйлеръ; а Лежандръ въ диссертаціи своей посему предмету, удостоенной награды отъ Берлинской Академіи наукъ въ 1782 году, усовершенствовалъ и пополнилъ оный многими полезными замѣчаніями.

§ 79. Извѣстны намъ уравненіе и видъ кривой описываемой тяжелымъ тѣломъ, брошеннымъ въ безвоздушное пространство; посмотримъ возможно ли будетъ успѣть въ томъ и для кривой описываемой тяжелымъ тѣломъ въ сопротивляющейся срединѣ. Мы видѣли, въ § 38, что сопротивленіе жидкости уподобляется укоснительной силѣ, коей направленіе противоположно движенію тѣла. Посему когда возмемъ въ разсмотрѣніе сію силу, то въ изслѣдованіе обстоятельствъ движенія тѣла, брошеннаго съ

извѣстною начальною скоростію, войдутъ двѣ непрерывно-дѣйствующія силы, тяжесть g и сопротивленіе R жидкости, изъ которыхъ первая дѣйствуетъ вертикально сверху внизъ, а вторая направлена по касательной въ каждой точки кривой линіи. Допустимъ, что послѣдняя сила ни сколько не уклоняетъ движущееся тѣло отъ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ направленіе бросанія; проведемъ въ сей плоскости горизонтальную ось Ax (Фиг. 15) и вертикальную ось Ay; и означимъ чрезъ x и y координаты, опредѣляющіе положеніе тѣла M по прошествіи времени t, а чрезъ s дугу AM симъ тѣломъ описанную. Изъ дифференціальнаго треугольника mMq, коего стороны $Mq = dx$, $mq = dy$ и $Mm = ds$, получимъ синусы угловъ, составляемы касательною въ точкѣ M съ осями Ax и Ay, относительно равными $\frac{dx}{ds}$ и $\frac{dy}{ds}$; слѣд разложивъ силу R на двѣ слагающія $R\frac{dx}{ds}$ и $R\frac{dy}{ds}$ по направленію оихъ осей, будемъ имѣть для предположеннаго нами движенія, уравненія.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{dx}{ds} \text{ и } \frac{d^2y}{dt^2} = -\left(R\frac{dy}{ds} + g\right),$$

которыя выводятся изъ общихъ уравненій криволинейнаго перемѣннаго движенія $\frac{d^2x}{dt^2} = X$ и $\frac{dy^2}{dt^2} = Y$ (Механика Франкера чл. 167), замѣняя ускорительныя силы X и Y силами $-R\frac{dx}{ds}$ и $-\left(R\frac{dy}{ds} + g\right)$ и сопровождая послѣднія знакомъ *минусъ*, потому что онѣ стремятся уменьшить координаты x и y.

§ 80. Сопротивленіе R, какъ замѣчено въ § 38, зависитъ вообще отъ вида, величины, плотности и скорости движущагося тѣла, оно зависитъ также отъ плотности воздуха, въ которомъ движется тѣло: но можно безъ ощутительной погрѣшности принять сію плотность постоянною по всей кривой нами изслѣдуемой; слѣдовательно, предположивъ сопротивленіе пропорціональнымъ квадрату скорости, которая равна $\frac{ds}{dt}$, будемъ имѣть $R = c\frac{ds^2}{dt^2}$; здѣсь коефиціентъ c сохраняетъ то же значеніе вовсе время движенія, и въ отношеніи къ сферическимъ и однороднымъ тѣламъ онъ равенъ (§ 52) $\frac{3\lambda D}{4kD}$.

И такъ предъидущія уравненія движенія, по постановленіи величины $R = c\frac{ds^2}{dt^2}$, примутъ на себя видъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -c\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - c\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} \quad \ldots\ldots (m')$$

§ 81. Изъ послѣднихъ двухъ уравненій первое интегрируется непосредственно: въ самомъ дѣлѣ по сокращеніи онаго на дифференціалъ dt, который почитается здѣсь постояннымъ, получимъ

$$\frac{\frac{d^2x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -cds \quad \text{или} \quad d\log\left(\frac{dx}{dt}\right) = -cds,$$

и отсюда

$$\log\left(\frac{dx}{dt}\right) = -cs + B,$$

здѣсь чрезъ B означена постоянная произвольная величина, прибавляемая къ интегралу. Назвавъ теперь e основаніе гиперболическихъ логарифмовъ и переходя отъ логарифма къ числу, будемъ имѣть

$$\frac{dx}{dt} = e^{-cs+B} = e^{B}\cdot e^{-cs} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dt} = Ce^{-cs}.$$

Для опредѣленія постоянной C, взятой вмѣсто e^B, должно прибѣгнуть къ начальнымъ усло-

віямъ движенія: но $\frac{dx}{dt}$ (§ 4) выражаетъ въ каж-

дое мгновеніе скорость движущагося тѣла параллельно оси Ax разложенную, слѣдовательно означивъ начальную скорость бросанія чрезъ a и уголъ CAB, составляемый направленіемъ бросанія съ горизонтомъ чрезъ θ,, то въ первое мгновеніе движенія, соотвѣтствующее точкѣ A, должно быть въ одно время $t=o$, $x=o$, $y=o$, $s=o$ и $\frac{dx}{dt}=a\cos\theta$; по сему постоянная $C=a\cos\theta$, и

$$\frac{dx}{dt}=a\cos\theta.e^{-cs}\ldots\ldots(\mathrm{n}').$$

§ 82. Если чрезъ p означимъ тригонометрическій тангенсъ угла MTP, составляемаго касательною къ кривой съ осью Ax, то будетъ

$$\frac{dy}{dx}=p \text{ и } \frac{dy}{dt}=p.\frac{dx}{dt},$$

отсюда, взявъ дифференціалъ, получимъ

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dp}{dt}\frac{dx}{dt}+p\frac{d^2x}{dt^2};$$

вставивъ сіи величины во второе изъ уравненій (m'), оно обратится въ

$$\frac{dp}{dt}\frac{dx}{dt}+p\frac{d^2x}{dt^2}=-g-cp.\frac{ds}{dt}.\frac{dx}{dt};$$

но первое уравненіе даетъ $p\frac{d^2x}{dt^2} = -cp.\frac{ds}{dt} : \frac{dx}{dt}$,

слѣдовательно по сокращеніи будемъ имѣть

$$\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} = -g \ldots\ldots (o').$$

Раздѣливъ теперь сей выводъ на квадратъ, найденной выше величины (n') для $\frac{dx}{dt}$ получится

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{ge^{2cs}}{a^2\cos^2\theta} \ldots\ldots (p').$$

Сіе новое уравненіе можетъ быть интегрируемо; въ самомъ дѣлѣ, умноживъ вторую его часть на ds, а первую на $dx\sqrt{1+p^2}$, что $= \sqrt{dx^2+dy^2} = ds$, то будетъ

$$dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{ge^{2cs}\,ds}{a^2\cos^2\theta},$$

и какъ перемѣнныя p и s отдѣлены въ семъ уравненіи, то по извѣстнымъ правиламъ взявъ интегралъ онаго, найдется

$$p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) = n - \frac{ge^{2cs}}{ca^2\cos^2\theta} (*) \ldots (q');$$

здѣсь чрезъ n означена постоянная произвольная величина. Мы опредѣлимъ оную изъ того

[*] Чтобъ вывесть сей интегралъ изъ дифференціальнаго уравненія $dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{ge^{2cs}\,ds}{a^2\cos^2\theta}$, то явно, что относитель-

условія, что въ началѣ движенія должно быть вдругъ $s=o$ и $p=tg\theta$; но тогда будетъ

$$n=tg\theta\sqrt{1+tg^2\theta}+log(tg\theta+\sqrt{1+tg^2\theta})+\frac{g}{ca^2cos^2\theta}.$$

Сему выраженію можно дать видъ гораздо простѣйшій и удобнѣйшій для вычисленія, въ са-

---

по неопредѣленно-степеннаго количества $e^{2cs}\,ds$ будетъ $\int e^{2cs}\,ds=\frac{e^{2cs}}{2c}$. Въ разсужденіи же выраженія $dp\sqrt{1+p^2}$, то вопервыхъ умноживъ и раздѣливъ его на $\sqrt{1+p^2}$ получимъ

$$\int dp\sqrt{1+p^2}=\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}+\int\frac{p^2dp}{\sqrt{1+p^2}};$$

но $\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=log\,[p+\sqrt{1+p^2}]$, потому что когда сдѣлаемъ $\sqrt{1+p^2}=t-p$, отсюда по уничтоженіи корня и по взятіи дифференціала будетъ $1=t^2-2pt$, $o=tdt-pdt-tdp$ и $dp=\frac{[t-p]dt}{t}$; въ слѣдствіе же сего преобразованія получимъ

$$\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\int\frac{[t-p]dt}{t[t-p]}=\int\frac{dt}{t}=logt=log\,[p+\sqrt{1+p^2}].$$

Потомъ если разложимъ выраженіе $\frac{p^2dp}{\sqrt{1+p^2}}$, на произведеніе множителей p и $\frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}}$, изъ коихъ второй даетъ $\int\frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}}=\sqrt{1+p^2}$, то чрезъ интегрированіе по частямъ или по формулѣ $\int udw=uw-\int wdu$, будемъ имѣть

момъ дѣлѣ, мы имѣемъ по началамъ Тригонометріи $\sqrt{1+tg^2\theta}=sec\theta=\frac{1}{cos\theta}$, $tg\theta\sqrt{1+tg^2\theta}=\frac{sin\theta}{cos^2\theta}$ и $tg\theta+\sqrt{1+tg^2\theta}=\frac{sin\theta+1}{cos\theta}=tg(45^\circ+\frac{1}{2}\theta)$ (*), а

$$\int\frac{p^2dp}{\sqrt{1+p^2}}=\int p.\frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}}=p\sqrt{1+p^2}-\int dp.\sqrt{1+p^2}.$$

Вставивъ теперь сіи величины въ выраженіе, котораго здѣсь ищемъ интегралъ, будемъ имѣть

$$\int dp\sqrt{1+p^2}=log[p+\sqrt{1+p^2}]+p\sqrt{1+p^2}=\int dp\sqrt{1+p^2};$$

отсюда

$$\int dp\sqrt{1+p^2}=\tfrac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}=\tfrac{1}{2}log[p+\sqrt{1+p^2}.]$$

И такъ интегралъ вышеприведеннаго уравненія будетъ

$$\tfrac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}+\tfrac{1}{2}log(p+\sqrt{1+p^2})=-\frac{ge^{2cs}}{2ca^2cos^2\theta}+\frac{n}{2}$$

или

$$p\sqrt{1+p^2}+log(p+\sqrt{1+p^2})+n=\frac{ge^{2cs}}{ca^2cos^2\theta},$$

что и надлежало найти.

(*) Почему $\frac{sin\theta+1}{cos\theta}=tg[45^\circ+\frac{1}{2}\theta]$, сіе видно изъ того, что

$$\frac{sin\theta+1}{cos\theta}=\frac{sin\theta+1}{\sqrt{1-sin^2\theta}}=\sqrt{\frac{(1+sin\theta)^2}{(1+sin\theta)(1-sin\theta)}}=\sqrt{\frac{1+sin\theta}{1-sin\theta}}=$$

$\sqrt{\frac{sin90^\circ+sin\theta}{sin90^\circ-sin\theta}}$; но по правиламъ Тригонометріи

$$\frac{sin90^\circ+sin\theta}{sin90^\circ-sin\theta}=\frac{tg\frac{1}{2}(90^\circ+\theta)}{tg\frac{1}{2}(90^\circ-\theta)}=tg(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta).cotg(45^\circ-\tfrac{1}{2}\theta)$$

и $cotg\,(45^\circ-\frac{1}{2}\theta)=tg\left\{90^\circ-(45^\circ-\frac{1}{2}\theta)\right\}=tg\,(45^\circ+\frac{1}{2}\theta)$, слѣдовательно будетъ

$$\frac{sin\theta+1}{cos\theta}=\sqrt{tg^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta)}=tg(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta).$$

слѣдовательно

$$n = \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} + \log tg(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta) + \frac{g}{ca^2\cos^2\theta} \quad \ldots\ldots (\mathrm{r}');$$

впрочемъ мы удержимъ для краткости количество n.

§ 83. Послѣ чего, если исключимъ e^{2cs} между уравненіями (p′) и (q′), то будемъ имѣть

$$dx = \frac{\frac{1}{c}\,dp}{p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) - n} \quad \ldots\ldots (\mathrm{s}'),$$

и по причинѣ $dy = pdx$,

$$dy = \frac{\frac{1}{c}\,pdp}{p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) - n} \quad \ldots\ldots (\mathrm{t}').$$

Если бы сіи уравненія могли быть интегрируемы въ конечномъ видѣ, то получили бы x и y въ функціи количества p, и тогда по исключеніи p имѣли бы отношеніе между x и y, то есть, уравненіе кривой линіи, которую описываетъ тѣло, движущееся въ сопротивляющейся срединѣ. Но извѣстные способы интеграціи вовсе не прилагаются къ предъидущимъ выраженіямъ, и видъ ихъ даже не подаетъ и надежды достигнуть когда либо къ требуемымъ интеграламъ. Можно еще время и скорость движущагося тѣла выразить въ функціи перемѣннаго количества p. Ибо изъ уравненія вышенай-

деннаго $\frac{dp}{pt} \cdot \frac{dx}{dt} = -g$ имѣемъ $dt^2 = -\frac{dp\,dx}{g}$;

отсюда, по постановленіи на мѣсто dx равной величины (s′) и по извлеченіи корня квадратнаго, получаемъ

$$dt = \frac{-dp}{\sqrt{cg\left\{n - p\sqrt{1+p^2} - log(p+\sqrt{1+p^2})\right\}}} \quad \ldots\ldots (u')$$

знакъ — поставленъ передъ корнемъ по той причинѣ, что съ увеличиваніемъ времени, уголъ, коего тангенсъ $= p$, уменьшается, такъ что дифференціалы dp и dt должны быть съ разными знаками. Что же касается до скорости, то означивъ оную чрезъ v, будемъ имѣть

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = (1+p^2)\frac{dx^2}{dt^2},$$

и по причинѣ уравненія $\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dp}{dt} = -g$, которое даетъ $\frac{dx}{dt} = -\frac{g\,dt}{dp}$, будетъ

$$v^2 = g^2(1+p^2)\frac{dt^2}{dp^2};$$

поставивъ вмѣсто $\frac{dt^2}{dp^2}$ равную величину взятую изъ уравненія (u′) получимъ скорость выраженную въ функціи отъ p чрезъ уравненіе

$$v^2 = \frac{g(1+p_2)}{c\left\{n - p\sqrt{1+p^2} - log(p+\sqrt{1+p^2})\right\}} \quad \ldots \text{(v')}.$$

§ 84. Для краткости сдѣлаемъ $p\sqrt{1+p^2}+log(p+\sqrt{1+p^2}) = \mathrm{P}$, чрезъ то вышеприведенныя формулы (q'), (s'), (t'), (u'), и (v') изобразятся слѣдующимъ образомъ:

1) $\mathrm{P} = n - \frac{ge^{2cs}}{ca^2\cos^2\theta}$, отсюда найдется

$$s = \frac{1}{2c}\, log\left\{\frac{ca^2\cos^2\theta}{g}(n-\mathrm{P})\right\};$$

2) $dx = -\frac{dp}{c(n-\mathrm{P})}$ и $x = -\frac{1}{c}\int\frac{dp}{n-\mathrm{P}}$ + пост. = AP;

3) $dy = -\frac{pdp}{c(n-\mathrm{P})}$ и $y = -\frac{1}{c}\int\frac{pdp}{n-\mathrm{P}}$ + пост. = MP;

4) $dt = -\frac{dp}{\sqrt{cg(n-\mathrm{P})}}$ и $t = -\frac{1}{\sqrt{cg}}\int\frac{dp}{\sqrt{n-\mathrm{P}}}$ + постоя.

5) $v^2 = \frac{g(1+p^2)}{c(n-\mathrm{P})}$;

здѣсь постоянныя придаваемыя къ интегралам найдутся изъ условій предполагающихъ, что въ началѣ движенія должно быть вдругъ $p = tg\theta$, $x = \theta$, $y = o$, $t = o$.

§ 85. Поелику для послѣдовательныхъ точекъ восходящей вѣтви AmD уголъ тангенса p (§ 82), начиная съ угла бросанія θ, который меньше 90°, постепенно убываетъ и въ вер-

шинѣ D, гдѣ касательная параллельна горизонту, дѣлается равнымъ нулю, то изъ сего заключаемъ, что, относительно всѣхъ точекъ восходящей вѣтви, количества p и P постоянно удерживаютъ положительную величину, и что они, съ сказаннымъ уменьшеніемъ угла, постепенно убываютъ и наконецъ уничтожаются при вершинѣ или самой возвышенной точкѣ D кривой. Въ послѣднемъ же случаѣ, когда $p=o$ и $P=o$, будемъ имѣть по формуламъ (1) и (5) § 84 длину восходящей вѣтви $AmD=s=\frac{1}{2c}\log\left(\frac{cn a^2\cos^2\theta}{g}\right)$ и скорость въ вершинѣ $v=\sqrt{\frac{g}{cn}}$ Далѣе D, въ точкахъ нисходящей вѣтви, каждая касательная M′T′ составляетъ съ осью абсциссъ тупой уголъ M′T′x, котораго тангенсъ отрицательный и тотъ же самой, что и тангенсъ остраго угла M′T′P′, служащаго первому дополненіемъ до 180°. По сему при послѣдовательномъ разсматриваніи точекъ опускающейся вѣтви DBH, тангенсу p соотвѣтствуетъ отрицательный острый уголъ, который начиная съ нуля градусовъ безпрестанно увеличивается и, какъ докажется тотчасъ,

приближается къ 90° или къ прямому углу, никогда его не достигая. Впрочемъ относительно точекъ сей вѣтви формулы § 84. остаются тѣ же самыя, принимая только въ нихъ величины p и P съ противнымъ знакомъ. Ибо съ перемѣною знака количества p, выраженіе $P = p\sqrt{1+p^2} + log(p+\sqrt{1+p^2})$ обратится въ $P' = -p\sqrt{1+p^2} + log(-p+\sqrt{1+p^2})$; но умноживъ и раздѣливъ $-p+\sqrt{1+p^2}$ на $p+\sqrt{1+p^2}$, получимъ $P' = -p\sqrt{1+p^2} + log\left(\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}}\right) =$ $-p\sqrt{1+p^2} - log(p+\sqrt{1+p^2})$, или $P' = -P$. Симъ образомъ для исходящей вѣтви формулы примутъ видъ:

1) $s = \frac{1}{2c} log\left(\frac{ca^2cos^2\theta}{g}(n+P)\right) = \smile ADM';$

2) $dx = \frac{dp}{c(n+P)}$ и $x = \frac{1}{c}\int\frac{dp}{n+P} +$ пост. $= AP';$

3) $dy = -\frac{pdp}{c(n+P)}$ и $y = -\frac{1}{c}\int\frac{pdp}{n+P} +$ пост. $= M'P';$

4) $dt = \frac{dp}{\sqrt{cg(n+P)}}$ и $t = \frac{1}{\sqrt{cg}}\int\frac{dp}{\sqrt{n+P}} +$ пост.;

5) $p^2 = \frac{g(1+p^2)}{c(n+P)}$

II. *Свойства кривой линіи полета.*

§ 86. Хотя невозможно интегрировать въ конечномъ видѣ предъидущія формулы, однако же помощію оныхъ удобно выведены быть могутъ нѣкоторыя примѣчательныя свойства, относительно кривой линіи полета.

По причинѣ, что кривая линія, которую бы описало въ безвоздушномъ пространствѣ брошенное тѣло, извѣстна и удобна къ построенію, и что трудности встрѣчаемыя при вычисленіяхъ не дозволяютъ имѣть уравненія кривой линіи полета въ сопротивляющейся срединѣ, то отнесемъ сію послѣднюю къ первой и сравнимъ величины ихъ дугъ между собою. Для сего положимъ, что сопротивленіе $R = \frac{cds^2}{dt^2} = o$; отсюда будетъ $c = o$ и уравненіе $dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{ge^{2cs}ds}{a^2\cos^2\theta}$ (§ 82) перемѣнится въ

$$dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{gds'}{a^2\cos^2\theta},$$

котораго интегралъ будетъ

$$p\sqrt{c+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) = E - \frac{2gs'}{a^2\cos^2\theta};$$

въ сіе уравненіе входитъ дуга s' различная отъ дуги s; послѣдняя $s = AM$ принадлежитъ дѣйст-

вительной кривой линіи полета, а первая $s' =$ AF относится къ параболѣ. Объ сіи дуги исходятъ изъ того же начала A и оканчиваются точками M и F, въ которыхъ касательныя составляютъ съ горизонтомъ равные углы, коихъ тангенсъ $= p$; впрочемъ сіи дуги не бываютъ проходимы въ одно и то же время. Поелику въ точкѣ A современно $s' = o$ и $p = tg\ \theta$, то найдется постоянная, прибавленная къ предъидущему интегралу,

$$E = tg\theta\sqrt{1+tg^2\theta} + log\,(tg\theta + \sqrt{1+tg^2\theta}) = \frac{sin\ \theta}{cos^2\theta} + log\,tg(45° + \tfrac{1}{2}\theta)$$

или, по причинѣ уравненія (r'),

$$E = n - \frac{g}{ca^2\,cos^3\,\theta};$$

вставивъ сію величину на мѣсто E въ выраженіе найденнаго здѣсь интеграла, будемъ имѣть

$$p\sqrt{1+p^2} + log(p + \sqrt{1+p^2}) = n - \frac{g}{ca^2cos^3\theta}\cdot\frac{2gs'}{a^2cos^2\theta}$$

или

$$P = n - \frac{g}{ca^2cos^2\theta}\,\frac{2gs'}{a^2cos^2\theta};$$

но по § 84

$$P = n - \frac{ge^{2cs}}{ca^2cos^2\theta},$$

слѣдовател., сравнивъ вторыя части, получимъ

$$e^{2cs} = 1 + 2cs', \text{ и } s = \frac{1}{2c}\ log\,(1 + 2cs').$$

Теперь предположивъ дуги s и s' отрицательными, или взявъ ихъ отъ A къ I и S на кривыхъ DAI и FAS продолженныхъ внизъ отъ точки A, будемъ имѣть

$$-s = \frac{1}{2c} \log (1 - 2cs').$$

Отсюда видно, что должно быть $s' < \frac{1}{2c}$, дабы дуга s была возможная; и что съ увеличиваніемъ дуги s', отъ $s' = o$ до $s' = \frac{1}{2c}$, дуга s весьма быстро возрастаетъ и при положеніи $s' = \frac{1}{2c}$ дѣлается безконечна. А какъ дуги s и s' имѣютъ одно начало и оканчиваются въ точкахъ, въ которыхъ касательныя параллельны между собою, то и заключаемъ, что когда на параболѣ FAS отложится дуга $AS = s' = \frac{1}{2c}$, тогда касательная SQ въ точкѣ g, будетъ параллельная касательной KL, соединяющейся съ вѣтвью AJ въ безконечномъ удаленіи отъ A. Слѣдовательно восходящая вѣтвь JAD кривой линіи полета въ сопротивляющейся срединѣ имѣетъ асимптоту KL, параллельную линіи QS извѣстной положеніемъ. Тангенсъ угла KGA, который

асимптота или касательная QS къ параболѣ составляетъ съ осью абсцисъ, найдется изъ уравненія $P = n - \frac{g}{ca^2\cos^2\theta} - \frac{2gs'}{a^2\cos^2\theta}$, которое, по причинѣ $s' = -AS = -\frac{1}{2c}$, приводится къ $P = n$ или

$$p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) = n;$$

уголъ тангенса p, приличествующій сему уравненію, будетъ предѣлъ наклоненія касательныхъ къ горизонту, проведенныхъ ко всѣмъ точкамъ восходящей вѣтви.

§ 87. Кривая линія полета еще имѣетъ со стороны нисходящей своей вѣтви другую асимптоту положеніемъ вертикальную. Дабы доказать сіе, то въ слѣдствіе отношенія $s = \frac{1}{2c}\log(1+2cs')$, въ предъидущемъ параграфѣ найденнаго, сначала замѣтимъ, что съ увеличиваніемъ параболической дуги s', въ то же время увеличивается и дуга s кривой линіи полета, и что когда первая сдѣлается безконечною, тогда и вторая будетъ безконечная. А поелику касательная къ параболѣ, которой ось здѣсь вертикальна, тѣмъ ближе подходитъ къ параллельности съ сею осью, чѣмъ точка ка-

санія взята далѣе отъ вершины, то изъ сего слѣдуетъ, что съ распространеніемъ исходящей вѣтви DBH касательная, въ концѣ оной, принимаетъ направленіе постепенно приближающееся къ вертикальному положенію, и что вмѣстѣ съ симъ тангенсъ p безпредѣльно возрастаетъ до безконечности. Теперь, если перенесемъ начало координатъ въ вершину кривой и примемъ обсциссы горизонтальные по направленію Dx', а ординаты вертикальные по направленію Dy'; и когда означимъ чрезъ x' и y' координаты какой ни есть точки, относительно сего новаго начала, то по сравненію ихъ съ прежними x и y для сей же точки, будемъ имѣть $x' = x - AE$ и $y' = DE - y$; и отсюда $dx = dx'$, $dy = -dy'$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{dy'}{dx'}$ или $p = -p'$, и $log\ (p + \sqrt{1+p^2}) = log(-p' + \sqrt{1+p'^2}) = -log\ (p' + \sqrt{1+p'^2})$, по причинѣ $-p' + \sqrt{1+p'^2} = \frac{1}{p' + \sqrt{1+p'^2}}$. Симъ образомъ уравненія (s′) и (t′) преобразуется въ

$$dx' = \frac{dp'}{c\{p'\sqrt{1+p'^2} + log(p' + \sqrt{1+p'^2}) + n\}}$$

и

$$dy' = \frac{p'dp'}{c\{p'\sqrt{1+p'^2} + log(p' + \sqrt{1+p'^2}) + n\}}.$$

Но по причинѣ, что для точекъ нисходящей вѣтви, достаточно удаленныхъ отъ вершины, количество p или ему равное p', можетъ быть разсматриваемо столь великимъ, какъ угодно, то безъ ощутительной погрѣшности можно въ такомъ случаѣ взять p' вмѣсто $\sqrt{1+p'^2}$ и уничтожить $log\,(p'+\sqrt{1+p'^2})$ въ сравненіи съ p'^2, ибо логарифмъ очень большаго числа, есть крайне малъ противъ сего числа; но отбросивъ и постоянную n въ отношеніи къ p'^2, получимъ

$$dx' = \frac{dp'}{cp'^2} \text{ и } dy' = \frac{dp'}{cp'},$$

а по совершеніи интеграціи

$$x' = b - \frac{1}{cp'}, \text{ и } y' = b' + \frac{1}{c} log\, p' :$$

сіи уравненія, въ коихъ b и b' суть постоянныя произвольныя, показываютъ, что величина ординаты y' не имѣетъ предѣла, поелику она возрастаетъ до безконечности вмѣстѣ съ p'. Но величина горизонтальной абсциссы x' имѣетъ предѣломъ постоянную b: изъ сего заключаемъ, что нисходящая вѣтвь имѣетъ вертикальную асимптоту; а именно, если отъ начала D по оси Dx' отложимъ абсциссу DK′$=b$ и чрезъ точку K′ проведемъ вертикаль-

ную прямую K′L′, тогда вѣтвь DBH, простертая до безконечности, приблизится къ сей прямой на разстояніе меньше всякой данной величины, никогда однако же съ оною не сливаясь.

§ 88. Поставивъ также—p' на мѣсто p въ уравненіе (u′), и сдѣлавъ надлежащее сокращеніе, въ предположеніи тангенса p' весьма большаго, получимъ

$$dt = \frac{1}{\sqrt{cg}} \cdot \frac{dp'}{p'},$$

и взявъ интегралъ

$$t = b'' + \frac{1}{\sqrt{cg}} \log p',$$

здѣсь чрезъ b'' означена постоянная присоединяемая къ интегралу. Потомъ исключивъ $\log p'$ между симъ уравненіемъ и найденнымъ въ предъидущемъ § уравненіемъ для y', будемъ имѣть

$$y' = t\sqrt{\frac{g}{c}} + b' - b''\sqrt{\frac{g}{c}}$$

или

$$y' = t\sqrt{\frac{g}{c}} + \text{постоян.}$$

сіе показываетъ, что движеніе тѣла по нисходящей вѣтви до безконечности безпрестанно

стремится содѣлаться не только вертикальнымъ, но и единообразнымъ со скоростію $= \sqrt{\frac{g}{c}}$. Точно такое же выраженіе мы имѣли и для окончательныхъ единообразныхъ скоростей, вертикально падающихъ тѣлъ (§ 60). Впрочемъ мы получили бы сей предѣлъ скорости посредствомъ уравненія (§ 85) $v^2 = \frac{g(1+p^2)}{c(n+p)}$, дѣлая въ немъ $p = \frac{1}{0} =$ безконечности. Но тогда v^2 приводится къ $\frac{\infty}{\infty}$; дифференцируя же числителя и знаменателя, имѣли бы $\frac{gp}{c\sqrt{1+p^2}} = \frac{g}{c\sqrt{\frac{1}{p^2}+1}}$, и полагая $p = \infty$, нашли бы $v^2 = \frac{g}{c}$ и $v = \sqrt{\frac{g}{c}}$, то есть, равно той скорости, къ которой скорость тѣла, движущагося по нисходящей вѣтви въ безконечность, болѣе и болѣе приближается никогда оной не достигая. Въ разсужденіи сихъ самыхъ большихъ окончательныхъ скоростей для нашихъ снарядовъ, смотри табл. § 61.

§ 89. По началамъ дифференціальнаго исчисленія, общее выраженіе радіуса кривизны

$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2 y}$; поставивъ въ сію формулу $dy = pdx$, $d^2y = dp.dx$, $dx^2 + dy^2 = (1 + p^2)dx^2$ и $dx = -\frac{dp}{c(n - P)}$ (§ 84), получимъ величину радіуса круга кривизны, относительно восходящей вѣтви

$$R = \frac{(1 + n^2)^{\frac{3}{2}}}{c(n - P)},$$

а относительно нисходящей вѣтви

$$R = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{c(n + P)};$$

отсюда видно, что при одинакой величинѣ тангенса p, радіусъ кривизны есть больше въ восходящей вѣтви, нежели въ нисходящей; и что когда $P = n$ онъ дѣлается безконечнымъ только въ первой вѣтви. Слѣдовательно обѣ вѣтви кривой, снарядомъ въ воздухѣ описываемой, несходны между собою бываютъ, но что восходящая менѣе крива, нежели нисходящая; а сіе очевидно происходитъ отъ того, что движеніе по первый быстрѣе бываетъ чѣмъ по второй, какъ-то показываетъ уравненіе $p^2 = \frac{g(1 + p^2)}{c(n + P)}$ для обѣихъ вѣтвей. Въ безвоз-

душномъ же пространствѣ, по теоріи параболической, сказанныя здѣсь обстоятельства одинаковы для двухъ вѣтвей.

§ 90. Наибольшая кривизна не въ самой вершинѣ, но нѣсколько далѣе ея, на опускающейся вѣтви DM′B находится: мы опредѣлимъ оную уравнивъ дифференціалъ количества R нулю, то есть, $dR = d\left\{\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{c(n+P)}\right\} =$

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{3(n+P)pdp.\sqrt{1+p^2} - (1+p^2)^{\frac{5}{2}}dP}{(n+P)^2}\right\} = o;$$

но $dP = 2dp.\sqrt{1+p^2}$ (§ 84), по сему будемъ имѣть, по постановленіи и сокращеніи,

$$3p\,(n+P) - 2\,(1+p^2)^{\frac{5}{2}} = o,$$

откуда найдется p. Въ точкѣ наибольшей кривизны уравненіе кривой (q′) приведено будетъ къ виду

$$e^{2cs} = \frac{ca^2\cos^2\theta}{g}\,(n+P)$$

или

$$e^{2cs} = \frac{2ca^2\cos^2\theta}{3gp}\,(1+p^2)^{\frac{5}{2}},$$

уравненіе же для скорости къ виду

$$v^2 = \frac{3gp}{2c\sqrt{1+p^2}}$$

Если рѣшимъ предъидущее уравненіе въ отно-

шеніи къ p, то не бравъ въ счетъ, при разложеніи членовъ онаго, степеней количества p, кои очень малы по причинѣ точки весьма близкой къ вершинѣ, найдется

$$p = \frac{2}{3n}, \text{ или точнѣе } p = \frac{2}{3n} - \frac{4}{9n^3},$$

когда приняты будутъ въ разсужденіе степени количества p.

§ 91. Въ предположеніи параболическаго пути, самая меньшая скорость снаряда бываетъ въ вершинѣ кривой; но при дѣйствительномъ пути въ воздухѣ, самая меньшая скорость остается у снаряда не въ самой вершинѣ, а нѣсколько далѣе оной. Въ самомъ дѣлѣ, когда снарядъ достигаетъ вершины, то движеніе его въ сей точкѣ становится горизонтальнымъ и тяжесть только что начинаетъ склонять его къ низу, сообщая ему, по направленію движенія, дѣйствіе весьма слабое сравнительно съ сопротивленіемъ на оный воздуха; а поелику съ убавленіемъ скорости, убавляется также сопротивленіе, между тѣмъ снарядъ получаетъ болѣе склонительное движеніе, по направленію коего дѣйствіе тяжести дѣлается ощутительнѣе, то и должна быть на нисходящей вѣтви

точка M′, въ которой сіе дѣйствіе и сопротивленіе между собою поравняются. Сія точка, гдѣ наименьшая скорость имѣетъ мѣсто, найдется бравъ дифференціалъ уравненія $v^2 = \frac{g(1+p^2)}{c(n+P)}$ и уравнивая оный нулю; выводъ отъ сего произшедшій будетъ

$$p(n+P) - (1+p^2)^{\frac{5}{2}} = o :$$

отсюда выводя величину $n+P$ и подставя въ формулы 1-ю и 5-ю § 85. будемъ имѣть

$$e^{2cs} = \frac{ca^2\cos^2\theta}{gp}(1+p^2)^{\frac{5}{2}} \text{ и } v^2 = \frac{gp}{c\sqrt{1+p^2}}.$$

Изъ сего ясно видно, что точка M′ далѣе отстоитъ отъ вершины, нежели та, въ которой наибольшая кривизна имѣетъ мѣсто.

Если рѣшимъ предшествующее уравненіе въ отношеніи къ p, то по причинѣ, что наименьшая скорость имѣетъ мѣсто близъ вершины, можно при разложеніи количествъ P и $(1+p^2)^{\frac{5}{2}}$ пренебречь высшіе степени отъ p и взять $P = 2p + \frac{p^3}{3}$ и $(1+p^2)^{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{5}{2}p^2 + \frac{5}{8}p^4$; но тогда по правилу обращенія рядовъ найдется

$$p = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3},$$

что опредѣляетъ величину тангенса въ точкѣ M′, гдѣ наименьшая скорость имѣетъ мѣсто.

III. *Построеніе кривой линіи полета, и составленіе таблицъ для употребленія при бросаніи болвъ.*

§ 92. Показавъ главныя свойства кривой, которой, какъ мы видѣли, не возможно имѣть въ конечномъ видѣ уравненія, посмотримъ какимъ образомъ, по крайней мѣрѣ приблизительно, находится положеніе послѣдовательныхъ точекъ оной, ея изображеніе, горизонтальное распространеніе, наибольшая высота, уголъ паденія снаряда, скорость его паденія и время движенія.

Поелику выраженіе дуги s въ функціи угла α, составляемаго касательною въ концѣ оной съ горизонтомъ извѣстно, то и можно вычислить сію дугу по частямъ, бравъ ихъ при семъ столь малыми, дабы можно было почесть оныя или за прямыя линіи или точнѣе за дуги круговъ кривизны. Но тогда для каждой части дуги найдутся соотвѣтствующія части абсциссы и ординаты. Ибо пусть Δs, Δx, Δy будутъ сіи части MmM′, Mg и M′g (фиг.

16) дуги абсциссы и ординаты; то въ случаѣ, когда часть кривой принимается за прямую линію, будемъ имѣть

$$\Delta x = \Delta s . \cos \alpha \text{ и } \Delta y = \Delta s . \sin \alpha ;$$

въ случаѣ же, когда часть MmM′ кривой принимается за дугу круга, будемъ имѣть изъ треугольника MM′g, прямоугольнаго при точкѣ G,

$$\Delta x = \mathrm{MM'} . \cos \mathrm{M'M}g \text{ и } \Delta y = \mathrm{MM'} . \sin \mathrm{M'M}g$$

Но если означимъ чразъ α и α' углы NMg и M′Tg наклоненія касательныхъ къ горизонту въ крайнихъ точкахъ дуги MmM′ и проведемъ радіусы MC и MC′, то по причинѣ угла NMM′ $= \mathrm{NM'M} = \frac{1}{2}\mathrm{TNM} = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')$, будетъ уголъ наклоненія хорды MM′ къ горизонту, то есть,

уголъ $\mathrm{M'M}g = \mathrm{NM}g - \mathrm{NMM'} = \alpha - \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') = \frac{\alpha + \alpha'}{2}$,

и хорда $\mathrm{MM'} = 2\mathrm{MD} = 2\mathrm{MC} . \sin \frac{1}{2} \mathrm{MCM'} = 2\mathrm{MC} . \sin \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')$. При чемъ очевидно, что $\mathrm{MC} : 1 = \Delta s : \alpha - \alpha'$ и $\mathrm{MC} = \frac{\Delta s}{\alpha - \alpha'}$; слѣдоват. найдется

$\mathrm{MM'} = \frac{\Delta s}{\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')} . \sin \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')$. Вставивъ въ предъидущія выраженія Δx Δy, найденныя для хорды MM′ и угла MM′g величины, получимъ

$$\Delta x = \frac{\Delta s}{\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')} . \sin \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') . \cos \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$$

и

$$\Delta y = \frac{\Delta s}{\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')} \cdot \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha') \sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') :$$

для краткости сдѣлаемъ $\alpha - \alpha' = \omega$ = разности угловъ наклоненія касательныхъ, проведенныхъ къ крайнимъ точкамъ каждой части Δs кривой линіи, то будемъ имѣть $\frac{\alpha + \alpha'}{2} = \alpha - \frac{1}{2}\omega$ и

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} \cdot \cos(\alpha - \tfrac{1}{2}\omega).\Delta s \\ \Delta y &= \frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} \cdot \sin(\alpha - \tfrac{1}{2}\omega).\Delta s \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (w').$$

§ 93. Пусть $p = tg\alpha$ = тангенсу угла наклоненія касательной въ M; $q = tg\alpha'$ тангенсу угла наклоненія касательной въ M′; и означимъ чрезъ Q ту величину, въ которую обращается функція P, по поставленіи въ ней q на мѣсто p. Посредствомъ уравненія (1) § 84, опредѣляющаго длину дуги s, будемъ имѣть дугу AM = $\frac{1}{2c}\log\left\{\frac{ca^2\cos^2\theta}{g}(n - P)\right\}$ и AM′ = $\frac{1}{2c}\log\left\{\frac{ca^2\cos^2\theta}{g}(n - Q)\right\}$; отсюда ⌣ AM′, или ⌣ AM, или

$$\smile MM' = \Delta s = \frac{1}{2c}\log\left(\frac{n - Q}{n - P}\right);$$

вставивъ сію величину въ уравненіе (w′), по-

лучимъ относительно каждой части Δs кривой линіи соотвѣтствующую часть абсциссы

$$\Delta x = \frac{1}{2c} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} \cdot \cos(\alpha - \tfrac{1}{2}\omega) \log\left(\frac{n-Q}{n-P}\right)$$

и часть ординаты

$$\Delta y = \frac{1}{2c} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} \sin(\alpha - \tfrac{1}{2}\omega) \log\left(\frac{n-Q}{n-P}\right).$$

Въ случаѣ угловъ α и α', весьма мало между собою различающихся, отношеніе $\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}$ почти равно 1-цѣ и слѣдовательно, тогда безъ большей ошибки можно взять

$$\Delta x = \frac{1}{2c} \cos(\alpha - \tfrac{1}{2}\omega) \log\left(\frac{n-Q}{n-P}\right)$$

$$\Delta y = \frac{1}{2c} \sin(\alpha - \tfrac{1}{2}\omega) \log\left(\frac{n-Q}{n-P}\right).$$

Въ разсужденіи скорости движущагося тѣла, будемъ имѣть въ точкѣ M (§ 84)

$$v = \sqrt{\frac{g}{c}\left(\frac{1+p^2}{n-P}\right)} = \sqrt{\frac{g}{c}} \cdot \frac{1}{\cos\alpha\sqrt{n-P}},$$

а въ точкѣ M′

$$v' = \sqrt{\frac{g}{c}\left(\frac{1+q^2}{n-Q}\right)} = \sqrt{\frac{g}{c}} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha-\omega)\sqrt{n-Q}},$$

взявъ среднюю между сими двумя скоростями, получимъ

$$\frac{v'+v''}{2} \text{ или } v = \sqrt{\frac{g}{c}} \left\{ \frac{1}{2\cos\alpha\sqrt{n-P}} + \frac{1}{2\cos(\alpha-\omega)\sqrt{n-Q}} \right\}$$

или

$$v = \varrho\sqrt{\frac{g}{c}},$$

здѣсь для крѣпкости $\frac{1}{2\cos\alpha\sqrt{n-P}} + \frac{1}{2\cos(\alpha-\omega)\sqrt{n-Q}} = \varrho$

Наконецъ время употребляемое снарядомъ на перебѣжаніе дуги MM′ будетъ

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{\frac{1}{2c}\log\left(\frac{n-Q}{n-P}\right) = \frac{1}{2\varrho\sqrt{gc}}\log\left(\frac{n-Q'}{n-P}\right)}{\varrho\sqrt{\frac{g}{c}}}.$$

§ 94. Входящіе въ сіи формулы логарифмы, суть Неперовые (гиперболическіе), которые можно замѣнить логарифмами обыкновенныхъ таблицъ, раздѣляя послѣдніе на модуль M=0,43429448, или умножая на число 2,3025851. И такъ означивъ обыкновенные логарифмы буквою L, будемъ имѣть для опредѣленія всѣхъ обстоятельствъ движенія тѣла въ воздухѣ, слѣдующія несложныя формулы:

1) $\Delta s = \frac{1}{2cM} \cdot \mathrm{L}\left(\frac{n-Q}{n-P}\right)$

2) $\Delta x = \frac{1}{2cM} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} \cdot \cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\omega\right) \mathrm{L}\left(\frac{n-Q}{n-P}\right),$

3) $\Delta y = \frac{1}{2cM} \frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} \cdot \sin(\alpha - \frac{1}{2}\omega)\, \mathrm{L}\left(\frac{n-\mathrm{Q}}{n-\mathrm{P}}\right)$,

4) $v = \varrho\sqrt{\frac{g}{c}}$,

5) $\Delta t = \frac{1}{2\mathrm{M}c\sqrt{gc}} \cdot \frac{1}{\varrho}\, \mathrm{L}\left(\frac{n-\mathrm{Q}}{n-\mathrm{P}}\right)$;

въ которыхъ $c = \frac{3\lambda D}{4kD'}$, (§ 52), $n = \frac{tg\,\theta}{cos\theta} + \frac{1}{\mathrm{M}}\,\mathrm{L}tg$ $(45° + \frac{1}{2}\theta) + \frac{g}{c\alpha^2 cos^2\theta}$ (§ 82), $\mathrm{P} = p\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{\mathrm{M}}$. $\mathrm{L}(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{tg\,\alpha}{cos\alpha} + \frac{1}{\mathrm{M}}\,\mathrm{L}\,tg\,(45° + \frac{1}{2}\alpha)$, $\mathrm{Q} = q\sqrt{1+q^2} + \frac{1}{\mathrm{M}}\mathrm{L}(q + \sqrt{1+q^2}) = \frac{tg\,\alpha'}{cos\,\alpha'} + \frac{1}{\mathrm{M}}\mathrm{L}tg(45° + \frac{1}{2}\alpha')$, $\alpha - \alpha' = \omega$, $g = 32{,}214$ фута.

При вычисленіи сихъ формулъ, какъ видно, необходимо должно имѣть напередъ всѣ величины функціи $\mathrm{P} = \frac{tg\,\alpha}{cos\alpha} + \frac{1}{\mathrm{M}}\mathrm{L}tg(45° + \frac{1}{2}\alpha)$, выводимыя изъ разныхъ мало между собою различающихся величинъ, назначаемыхъ углу α. Таблица величинъ P, составленная такимъ образомъ постолнно принадлежать будетъ ко всѣмъ кривымъ, и для употребленіи оной при бросаніи бомбъ, весьма достаточно имѣть вычисленную таблицу только для угловъ четверти круга отъ 5 до 5

градусовъ, начиная съ 0°, которая здѣсь и сообщается.

Таблица, показывающая величины функціи P *для градусовъ четверти круга отъ* 5 *до*5°.

Углы α	$tg\alpha . \sec\alpha$	$\frac{1}{M} L tg\,(45° + \frac{1}{2}\alpha)$	P
5°	0,0878229	0,0873773	0,1752002
10	0,1790471	0,1754259	0,3544730
15	0,2774014	0,2648422	0,5422436
20	0,3873290	0,3563785	0,7437075
25	0,5145135	0,4508753	0,9653888
30	0,6666667	0,5493061	1,2159728
35	0,8547956	0,6528566	1,5076322
40	1,0953665	0,7629100	1,8582765
45	1,4142136	0,8813736	2,2955872
50	1,8540393	1,0106833	2,8647226
55	2,4899000	1,1542345	3,6441345
60	3,4641016	1,3169579	4,7810595
65	5,0743358	1,5064717	6,5808075
70	8,0330856	1,7354152	9,7685008
75	14,4195366	2,0275893	16,4471259
80	32,6596102	2,4362457	35,0958559

§ 95. Имѣя послѣдовательныя величины P и зная уголъ бросанія $= \theta$ и начальную скорость $= a$, легко вычислить предъидущія формулы для всѣхъ угловъ постоянно измѣняющихся, напр. чрезъ 5 градусовъ, а слѣдовательно таковыхъ, что $\frac{1}{2}\omega = 2°\,30'$. Но чрезъ то со-

ставится таблица о шести столбцахъ, въ которой, начавъ вычисленіе съ угла бросанія или $\theta = \theta$ и продолживъ оное до $\theta = o$ или до вершины кривой линіи, первый столбецъ будетъ заключать наклоненіе кривой въ разныхъ ея точкахъ; второй, дуги содержащіяся между каждыми послѣдовательными двумя наклоненіями; третій, величины Δx или соотвѣтствующія части абсциссы; четвертый, величины Δy или соотвѣтствующія части ординаты; пятый, скорости въ разныхъ точкахъ кривой линіи; наконецъ шестой, величины Δt. Сложивъ порознь всѣ части Δx и всѣ части Δy, получимъ горизонтальное разстояніе восходящей вѣтви и самую большую высоту полета снаряда; также сложивъ всѣ величины Δt, получимъ время восхожденія снаряда. Послѣ сего сдѣлавъ количества P, φ и ω отрицательными, должно продолжить подобное же вычисленіе для послѣдовательныхъ частей нисходящей вѣтви, и начиная отъ вершины, или $\alpha = o$, взять сумму величинъ Δy, равную помянутой наибольшей высотѣ, также и сумму соотвѣтственныхъ величинъ Δx; то сія послѣдняя опредѣлитъ горизонтальное разстояніе нисходящей вѣтви;

пятый столбецъ покажетъ намъ скорость въ точкѣ паденія, а уголъ паденія извѣстенъ будетъ изъ перваго столбца; сумма же всѣхъ соотвѣтственныхъ величинъ Δt, опредѣлитъ время движенія по нисходящей вѣтви. Сложивъ найденныя горизонтальныя разстоянія для обѣихъ вѣтвей, получимъ всю горизонтальную дальность полета; сложивъ же время движенія по восходящей вѣтви со временемъ по нисходящей, получимъ все время движенія снаряда. Впрочемъ сіи выводы относятся къ тому случаю, когда предметъ, въ который должно попасть находится на одномъ съ орудіемъ горизонтѣ. Но если онъ будетъ выше или ниже сего горизонта, то стоитъ только при нисходящей вѣтви взять сумму величинъ Δy, которая равна была разности между наибольшею высотою и разстояніемъ предмета отъ горизонта (когда онъ выше); или равна наибольшей высотѣ сложенной съ разстояніемъ предмета отъ горизонта (когда онъ ниже). Тогда соотвѣтственно той или другой суммѣ, подобно предъидущему, удобно найдется горизонтальное разстояніе, время полета, скорость паденія и уголъ паденія.

§ 96. Поелику величины координатъ x и y, какой либо точки кривой линіи, выведены изъ послѣдовательныхъ частей Δs, почитаемыхъ вмѣсто настоящихъ дугъ за дуги круговъ кривизны, то весьма важно знать тѣ поправки, кои необходимо должны быть отнесены къ симъ координатамъ. Для сего сыщемъ величину ξ, изъ уравненія (§ 92)

$$x = \frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} \Sigma \Delta s. \cos(\alpha - \tfrac{1}{2}\omega) + \xi,$$

въ которомъ знакъ Σ конечнаго интеграла выражаетъ сумму послѣдовательныхъ величинъ $\Delta s. \cos(\alpha - \frac{1}{2}\omega)$, происходящихъ отъ уменьшенія угла α, постоянно на одно и то же количество ω, отъ $\alpha = \theta$ до $\alpha = \theta - n\omega =$ углу, соотвѣтствующему дугѣ s; сія сумма находится по правилу § 95, и служитъ къ опредѣленію первой приближенной величины абсциссы $x = \frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} \Sigma$

$$\Delta s. \cos(\alpha - \tfrac{1}{2}\omega) = \frac{1}{2cM} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} \cdot \Sigma \cos(\alpha - \tfrac{1}{2}\omega) \mathrm{L}\left(\frac{n - \mathrm{Q}}{n - \mathrm{P}}\right)$$

Взявъ разность предъидущаго уравненія, получимъ

$$\Delta \xi = \Delta x - \frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} \cdot \Delta s. \cos(\alpha - \tfrac{1}{2}\omega);$$

и если перемѣнныя x и s примемъ за функціи отъ α и разности оныхъ разложимъ, по Тайлоровой теоремѣ, въ рядъ, то будетъ

$$\Delta s = -\frac{ds}{d\alpha}\,\omega + \frac{d^2s}{d\alpha^2}\cdot\frac{\omega^2}{2} - \frac{d^3s}{d\alpha^3}\cdot\frac{\omega^3}{2.3} + \ldots\ldots$$

и

$$\Delta x = -\frac{dx}{d\alpha}\,\omega + \frac{d^2x}{d\alpha^2}\cdot\frac{\omega^2}{2} - \frac{d^3x}{d\alpha^3}\,\frac{\omega^3}{2.3} + \ldots\ldots$$

при семъ имѣемъ

$$\cos\left(\alpha - \tfrac{1}{2}\omega\right) = \cos\alpha + \frac{\omega}{2}\sin\alpha - \frac{1}{1.2}\cdot\frac{\omega^2}{4}\cos\alpha - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{\omega^3}{8}\sin\alpha + \ldots\ldots$$

и

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} = 1 - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{\omega^2}{4} + \frac{1}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{\omega^4}{16} - \ldots\ldots$$

а уравненіе $dx = ds.\cos\alpha$ даетъ

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{ds}{d\alpha}.\cos\alpha;$$

$$\frac{d^2x}{d\alpha^2} = \frac{d^2s}{d\alpha^2}.\cos\alpha - \frac{ds}{d\alpha}.\sin\alpha,$$

$$\frac{d^3x}{d\alpha^3} = \frac{d^3s}{d\alpha^3}\cos\alpha - 2\frac{d^2s}{d\alpha^2}\sin\alpha - \frac{ds}{d\alpha}\cos\alpha,$$

$$\frac{d^4x}{d\alpha^4} = \frac{d^4s}{d\alpha^4}\cos\alpha - 3\frac{d^3s}{d\alpha^3}\sin\alpha - 3\frac{d^2s}{d\alpha^2}\cos\alpha + \frac{ds}{d\alpha}\sin\alpha,$$ и проч.

и такъ найдется, съ одной стороны

$$\begin{aligned}\Delta x = &-\frac{ds}{d\alpha}\left(\omega\cos\alpha + \frac{\omega^2}{2}\sin\alpha - \frac{\omega^3}{2.3}\cos\alpha - \frac{\omega^4}{2.3.4}\sin\alpha + \ldots\right)\\ &+\frac{d^2s}{d\alpha^2}\left(\frac{\omega^2}{2}\cos\alpha + 2\frac{\omega^3}{2.3}\sin\alpha - 3\frac{\omega^4}{2.3.4}\cos\alpha + \ldots\right)\\ &-\frac{d^3s}{d\alpha^3}\left(\frac{\omega^3}{2.3}\cos\alpha + 3.\frac{\omega^4}{2.3.4}\sin\alpha + \ldots\right)\\ &+\frac{d^4s}{d\alpha^4}\left(\frac{\omega^4}{2.3.4}\cos\alpha - \ldots\right)\end{aligned}$$

и проч.

а съ другой стороны

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}\Delta_{s.\cos(\alpha-\frac{1}{2}\omega)} = \frac{d\,s}{d\,\alpha}\left(\omega\cos\alpha + \frac{\omega^2}{2}\sin\alpha - \frac{\omega^3}{2.3}\cos\alpha - \frac{\omega^4}{2.3.4}\sin\alpha + \right.$$

$$+\frac{d^2s}{d\alpha^2}\left(\frac{\omega^2}{2}\cos\alpha + \frac{\omega^3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\omega^4}{2.3}\cdot\frac{1}{2}\cos\alpha + \ldots\right)$$

$$-\frac{d^3s}{d\alpha^3}\left(\frac{\omega^3}{2.3}\cos\alpha + \frac{\omega^4}{2.3}\cdot\frac{1}{2}\sin\alpha - \ldots\right)$$

$$+\frac{d^4s}{d\alpha^4}\left(\frac{\omega^4}{2.3.4}\cos\alpha + \ldots\right)$$

и проч.

отсюда, вычитая послѣднее разложеніе изъ предъидущаго и ограничиваясь степенью ω^4, получимъ

$$\Delta s = \frac{d^2s}{d\alpha^2}\left(\frac{\omega^3}{3.4}\sin\alpha - \frac{\omega^4}{3.4}\cdot\frac{1}{2}\cos\alpha + \ldots\right)$$

$$-\frac{d^3s}{d\alpha^3}\left(\frac{\omega^4}{2.3.4}\sin\alpha - \ldots\right) + \text{ и проч.}$$

сдѣлавъ $\xi = P\omega^2 - Q\omega^3 + R\omega^4 - \ldots$, будемъ имѣть

$$\Delta\xi = \omega^2\Delta P - \omega^3\Delta Q + \omega^4\Delta R - \ldots$$

или

$$\Delta\xi = -\frac{dP}{d\alpha}\cdot\omega^3 + \frac{d^2P}{d\alpha^2}\cdot\frac{\omega^4}{2} + \frac{dQ}{d\alpha}\cdot\omega^4 + \ldots;$$

сравнивъ сіе выраженіе съ предшествующимъ, получимъ для опредѣленія коеффиціентовъ P и Q два уравненія

$$\frac{dP}{d\alpha} = -\frac{d^2s}{d\alpha^2}\cdot\frac{\sin\alpha}{3.4}$$

и

$$\tfrac{1}{3}\frac{d^2P}{d\alpha^2}+\frac{dQ}{d\alpha}=-\frac{d^2s}{d\alpha^2}\cdot\frac{\cos\alpha}{2.3.4}-\frac{d^3s}{d\alpha^3}\cdot\frac{\sin\alpha}{2.3.4},$$

изъ коихъ первое, будучи интегрируемо по частямъ, даетъ

$$P=-\frac{ds}{d\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{3.4}+\frac{1}{3.4}\int ds.\cos\alpha$$

или

$$P=-\frac{ds}{d\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{3.4}+\frac{x}{3.4}+\text{пост.}\ldots,$$

а второе, по причинѣ $\frac{1}{2}\frac{d^2P}{d\alpha^2}=-\frac{d^2s\cos\alpha}{d\alpha^2\cdot 2.3.4}-\frac{d^3s}{d\alpha^3}\cdot\frac{\sin\alpha}{2.3.4}$, даетъ $\frac{dQ}{d\alpha}=o$. Слѣд. искомая поправка

$$\xi=-\frac{\omega^2}{1.2}\left(\frac{ds}{d\alpha}\sin\alpha-x+\text{пост.}\right)$$

и первоначальное уравненіе для сей величины приметъ видъ

$$x=\frac{\sin^2\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\alpha}\Sigma\Delta s.\cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\omega)-\frac{\omega^2}{1.2}\left(\frac{ds}{d\alpha}.\sin\alpha-x+\text{пост.}\ldots\right);$$

а поелику мы нашли $Q=o$, то явно, что сей выводъ есть точный до количествъ помноженныхъ на весьма малозначительную величину ω^4.

Но дифференцируя уравненіе $s=\frac{1}{2c}\log\left\{\frac{cn^2\cos^2\theta}{g}(n-P)\right\}$, будемъ имѣть $ds=-\frac{dP}{2c(n-P)}=-\frac{dp\sqrt{1+p^2}}{c(n-P)}$; при семъ $dp=dtg\,\alpha=\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$ и $\sqrt{1+p^2}=\frac{1}{\cos\alpha}$; по

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{c(n-\mathrm{P})\cos^3\alpha};$$

поставивъ сію величину въ выраженіе ξ, получимъ

$$\xi = \frac{\omega^2}{1.2}\left\{\frac{tg\alpha}{c(n-\mathrm{P})\cos^2\alpha} + x + \text{пост.}\right\}.$$

Постоянная заключающаяся въ скобкахъ, найдется изъ частныхъ величинъ соовѣтствующихъ началу движенія, $\alpha = \theta$, $x = o$, $\xi = o$ и $n - \mathrm{P} = n - \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - log\,tg(45^\circ + \frac{1}{2}\theta) = \frac{g}{ca^2\cos^2\theta}$ (§82); она будетъ равна $-\frac{a^2 tg\theta}{g}$ и поправка для горизонтальной абсциссы дуги кривой линіи, выразится чрезъ

$$\xi = \frac{\omega^2}{1.2}\left\{\frac{tg\alpha}{c(n-\mathrm{P})\cos^2\alpha} - \frac{a^2 tg\theta}{g} + x\right\} \ldots\ldots (x'),$$

не забывая при семъ перемѣнить знакъ угла α, когда абсцисса, постоянно считаемая отъ точки бросанія оканчивается при нисходящей вѣтви.

§ 97. Для поясненія сказаннаго нами въ послѣднихъ параграфахъ, положимъ, что 5-типудовая бомба брошена будетъ подъ угломъ въ 45° градусовъ, (который у насъ обыкновенно употребляется) съ начальною скоростію = 600

футамъ въ секунду; требуется опредѣлить самую большую высоту, на которую она поднимается, горизонтальную дальность паденія, уголъ паденія, остающуюся скорость при паденіи и время, которое она употребляетъ на совершеніе своего полета.

Въ семъ вопросѣ $a=600$ фут., $\theta=45°$; при чемъ изъ таблицы приложенной въ § 55. имѣемъ относительно 5-ти-пудовой бомбы, значенія величинъ $\frac{D'}{D}$ и k, кои должны быть вставлены въ выраженіе $C=\frac{3\lambda D}{4kD'}$. Въ разсужденіи же множителя λ, который измѣняется вмѣстѣ со скоростію, то для него должно взять изъ таблицы § 48 величину, принадлежащую среднему сопротивленію выводимому изъ тѣхъ, кои соотвѣтствуютъ двумъ скоростямъ, наибольшей и наименьшей, получаемымъ бомбою во время ея полета. А послику начальная скорость есть самая большая, изъ всѣхъ остающихся у снаряда во время его движенія надъ горизонтомъ, самая же меньшая скорость находится по формуламъ § 91, и въ настоящемъ случаѣ почти равна 250 фут., то по правилу § 56 найдемъ $\lambda=0725$. Потомъ вычисляя величину c по логарифмамъ, будемъ

имѣть $Lc = 6{,}0973098 - 10$; и отсюда помощію таблицы § 94, которая даетъ, при углѣ 45°, величину $\frac{tg\theta}{cos\theta} + \frac{1}{M} Ltg\,(45° + \frac{1}{2}\theta) = 2{,}2955872$, найдется

$$n = 2{,}2955872 + \frac{2g}{ca^2} = 3{,}7260035.$$

§ 98. Слѣдующая таблица показываетъ величины коеффиціента λ, для разныхъ начальныхъ скоростей 5-ти-пудовой бомбы, а также логарифмы количества $c = \frac{3\lambda D}{4bD'}$ и величины n, въ предположеніи угла возвышенія $\theta = 45°$.

Начальныя скорости a.	Величины коеффиціента λ.	Логарифмы количества c.	Величины n
150	0,68	6,0694807 - 10	26,6968048
200	0,685	6,0726623...	15,9210861
250	0,69	6,0758208...	10,9527144
300	0,695	6,0789566...	8,2642299
350	0,70	6,0820698...	6,6493902
400	0,705	6,0851609...	5,6053272
450	0,71	6,0882301...	4,8922758
500	0,715	6,0912778...	4,3841949
550	0,72	6,0943043...	4,0097223
600	0,725	6,0973098...	3,7260035
650	0,73	6,1002946...	3,5060556
700	0,735	6,1032591...	3,3322070
750	0,74	6,1062035...	3,1924968
800	0,75	6,1120330...	3,0733759

§ 99. Возвратимся къ нашему вопросу и составимъ слѣдующія двѣ таблицы,

I. *Для восходящей вѣтви.*

α	$L(n-P)$.	$L\left(\frac{n-Q}{n-P}\right)$	$\cos(\alpha-\frac{1}{2}\omega)L\left(\frac{n-Q}{n-P}\right)$.	$\sin(\alpha-\frac{1}{2}\omega)L\left(\frac{n-Q}{n-P}\right)$	$\frac{1}{2\cos\alpha\sqrt{n-P}}$	Q	$\frac{1}{Q}L\left(\frac{n-Q}{n-P}\right)$
45°	0,1554624				0,5912264		
40	0,2713134	0,1158510	0,0854143	0,0782678	0,4775945	1,0688209	0,1083914
35	0,3462343	0,0747209	0,0592801	0,0454872	0,4098155	0,8874100	0,0842013
30	0,3996790	0,0536447	0,0452435	0,0288233	0,3644181	0,7742336	0,0692875
25	0,4410058	0,0413268	0,0366573	0,0190826	0,3320408	0,6964589	0 0593585
20	0,4745508	0,0335450	0,0309915	0,0128371	0,3081121	0,6401529	0,0524015
15	0,5029402	0,0283894	0,0270754	0,0085369	0,2901036	0,5982177	0,0474566
10	0,5278272	0,0248870	0,0242971	0,0053865	0,2765063	0,5666119	0,0439225
5	0,5503266	0,0224994	0,0223069	0,0029568	0,2663560	0,5427623	0,0414459
0	0,5712433	0,0209167	0,0208968	0,0009124	0,2590290	0,5253850	0,0398121
		сумма	0,3521629	0,2022706			0,5462573

II. Для нисходящей ветви.

α	$L(n+P)$	$L\left(\frac{n+Q}{n+P}\right)$	$\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}\omega)L\left(\frac{n+Q}{n+P}\right)$	$\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}\omega)L\left(\frac{n+Q}{n+P}\right)$	$\frac{1}{2\cos\alpha\sqrt{n+P}}$	ϱ.	$\frac{1}{\varrho}L\left(\frac{n+Q}{n+P}\right)$
0°	0,5712433				0,2590290		
5	0,5911986	0,0199553	0,0199363	0,0008704	0,2541128	0,5131418	0,0388885
10	0,6107109	0,0195123	0,0193454	0,0025469	0,2513409	0,5054537	0,0386035
15	0,6302496	0,0195387	0,0190756	0,0042289	0,2505541	0,5018950	0,0389298
20	0,6502795	0,0200299	0,0191029	0,0060231	0,2516776	0,5022317	0,0398848
25	0,6713018	0,0210223	0,0194221	0,0080448	0,2547085	0,5063861	0,0415144
30	0,6939008	0,0225990	0,0200456	0,0104351	0,2597102	0,5144187	0,0439311
35	0,7188035	0,0249027	0,0210027	0,0133802	0,2668111	0,5265213	0,0472967
40	0,7469672	0,0281637	0,0223438	0,0171449	0,2762055	0,5430166	0,0518653
45	0,7797112	0,0327440	0,0241414	0,0221215	0,2881571	0,5643626	0,0580194
50	0,8189332	0,0392220	0,0264980	0,0289175	0,3029953	0,5911524	0,0663484
55	0,8674757	0,0485425	0,0295508	0,0385114	0,3211004	0,6240957	0,0777805
60	0,9297796	0,0623039	0,0334759	0,0525466	0,3428547	0,6639551	0,0938375
			сумма	0,2739405	0,2047713		0,6368969

Теперь, если вычисленныя суммы послѣдовательныхъ измѣнлющихся величинъ отъ $\alpha = 45^{\circ}$ до $\alpha = o^{\circ}$, для формулъ выставленныхъ въ заглавіи 4-го, 5-го и 8-го столбцевъ первой таблицы, помножить двѣ первыя 0,3521629 и 0,2022706 на постояннаго множителя $\frac{1}{2cM} \frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}$, а третію 0,5462575 на постояннаго множителя $\frac{1}{2M\sqrt{cg}}$, то найдется горизонтальное распространеніе восходящей вѣтви = 3239,53 фут. = 462,79 саж., самая большая высота, до коей восходитъ бомба = 1860,68 фут = 265,81 саж., и время, въ которое она совершаетъ свой полетъ по восходящей вѣтви = 9″ 91.

Переходя ко 2-й таблицѣ, когда предположимъ, что выстрѣлъ производится по предмету на одномъ горизонтѣ съ орудіемъ находящемуся, или что нисходящая вѣтвь имѣетъ одинаковую высоту съ восходящею, то въ семъ случаѣ должно взять сумму величинъ въ 5-мъ столбцѣ равную прежней 0,2022706, по коей находится самая большая высота. Но какъ точно таковая сумма не выходитъ, а иная, 0,2047713, которая нѣсколько болѣе оной ко-

личествомъ 0,0025007, по этому и другія суммы и величины при одномъ и томъ же углѣ 60 градусовъ съ нею вычисленныя соразмѣрно сему количеству, должны быть уменьшены. Поелику же разность 0,0525466 въ 5-мъ столбцѣ соотвѣтствуетъ 5 градусамъ разности угловъ 60° и 55°, то найдется чрезъ пропорцію, что 0,0025007 соотвѣтствуетъ 14′17″ разности между угломъ 60° и искомымъ угломъ паденія, и что сей послѣдній = 59° 45′ 43″. Взявъ между симъ угломъ и 60° средній уголъ = 59°52′52″, явно что количество, на которое слѣдуетъ убавить сумму 0,2739405 въ 4-мъ столбцѣ, для горизонтальнаго распространенія нисходящей вѣтви, будетъ равно $\frac{0{,}0025007}{59°52'52''} = 0{,}0014507$, уменьшенная же сумма = 0,2724898, а искомое распространеніе равно $\frac{1}{2cM} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}$ 0,2724898 = 2506,62 футъ = 358,09 саж., но выше найдено, что горизонтальное распространеніе восходящей вѣтви = 5259,53 фута, слѣдовательно горизонтальная дальность полета бомбы = 5746,15 фут. = 820,88 саж.

Количество, на которое нужно убавить сум-

му 0,6368969 въ послѣднемъ столбцѣ, для искомаго времени полета по нисходящей вѣтви, составляетъ четвертый членъ пропорціи.

0,0525466 : 0,0025007 = 0,0938375 : 0,0044657,

въ которой первыя два члена тѣ же, кои служили выше къ уменьшенію угла 60° при отысканіи угла паденія, а третій членъ взятъ изъ послѣдняго столбца, соотвѣтственно первому члену пропорціи или разности угловъ 60° и 55°. По сему будетъ уменьшенная сумма = 0,6324312, а время полета по нисходящей вѣтви $= \frac{1}{2M\sqrt{cg}}$. 0,6324312 = 11″,469; но выведено выше, что время полета по восходящей вѣтви = 9″,91, слѣдовательно все время, въ которое бомба совершаетъ свой полетъ, равно 21″, 38. Наконецъ когда къ первымъ двумъ членамъ предъидущей пропорціи и къ разности 0,0217343 двухъ чиселъ въ 6-мъ столбцѣ, находящихся противъ угловъ 60° и 55°, сыщемъ четвертый пропорціональный членъ, вычтемъ его изъ большаго числа 0,3428547, и происшедшую разность помножимъ на $2\sqrt{\frac{g}{c}}$, то получимъ скорость бомбы при паденіи на горизонтъ =

346,89 фут.; ибо каждое число въ семъ столбцѣ, будучи умножено на $2\sqrt{\frac{g'}{c}}$, опредѣляетъ скорость бомбы въ той точкѣ, гдѣ направленіе кривой линіи съ горизонтомъ, составляетъ соотвѣтствующій сему числу уголъ.

Поправка касательно горизонтальной дальности=5746,15 футъ, по формулѣ (x'), находится равною $\xi = -7{,}5$ футъ, которая во всякомъ случаѣ бываетъ почти ничтожная.

Поступая такимъ образомъ и выводя подобныя величины для другихъ начальныхъ скоростей, употребительныхъ при бросаніи бомбъ и гранатъ изъ нашихъ мортиръ всѣхъ извѣстныхъ калибровъ, легко составимъ таблицы, кои и помѣщены въ концѣ § 101.

§ 100. Формулы § 94, по коимъ сочинены быть могутъ подобныя таблицы, ясно показываютъ, что когда разные снаряды будутъ брошены подъ тѣмъ же угломъ возвышенія θ, съ начальными скоростями пропорціонными корнямъ квадратнымъ изъ произведеній діаметровъ на плотности ихъ, тогда количество

$$n = \frac{lg\,\theta}{cos\theta} + \frac{1}{M}\,L lg(45° + \tfrac{1}{2}\theta) + \frac{g}{ca^2\cos^2\theta} \quad (\S\ 94)$$

остается постояннымъ и въ кривыхъ линіяхъ, описываемыхъ сими снарядами, дальности, высоты и всѣ сходственныя линіи дѣлаются пропорціональными произведеніямъ изъ діаметровъ на плотности снарядовъ, а времена полета и скорости паденія пропорціональными корнямъ квадратнымъ изъ сихъ произведеній. Но изъ сего начала слѣдуетъ, что если для практическаго употребленія будетъ вычислена таблица, заключающая необходимыя обстоятельства движенія одного снаряда, бросаемаго подъ опредѣленнымъ угломъ возвышенія съ разными употребительными начальными скоростями, тогда посредствомъ оной чрезъ сказанное сравненіе, удобно составятся таблицы и для другихъ снарядовъ, бросаемыхъ подъ тѣмъ же угломъ возвышенія. Въ самомъ дѣлѣ, пусть діаметръ перваго снаряда $= k$, его плотность $= D'$, начальная скорость бросанія $= a$, соотвѣтствующая горизонтальная дальность паденія $= x$, самая большая высота полета $= y$, время всего полета $= t$, скорость при паденіи $= v$, а уголъ паденія $= \alpha$; и означимъ чрезъ k', D'', a', x', y', t', v', α' подобныя же величины отнесенныя къ другому какому либо снаряду, изъ коихъ вели-

чины x', y', t', v', α' должны быть опредѣлены чрезъ предъидущія, для какой ни есть данной начальной скорости a сего снаряда. Сначала, по пропорціи $a : a' = \sqrt{kD'} : \sqrt{k'D''}$, найдется скорость $a = a'\sqrt{\frac{kD'}{k'D''}}$, а изъ таблицы, вычисленной для 1-го снаряда извѣстны будутъ и соотвѣтствующія величины x, y, t, v, сей скорости; потомъ чрезъ вышеприведенное сравненіе, получимъ

$$x' = \frac{k'D''x}{kD'}, y' = \frac{k'D''y}{kD'}, v' = v\sqrt{\frac{k'D''}{kD'}}, t' = t\sqrt{\frac{k'D''}{kD'}}$$

и $\alpha' = \alpha$. Въ случаѣ равныхъ плотностей $D' = D''$, сіи уравненія обратятся въ $a = a'\sqrt{\frac{k}{k'}}$, $x = \frac{k'x}{k}$, $y' = \frac{k'y}{k}$, $v' = v\sqrt{\frac{k'}{k}}$ и $t' = t\sqrt{\frac{k'}{k}}$.

§ 101. Симъ образомъ помощію таблицы I-й, составленной по формуламъ § 94 для 5-ти-пудовой бомбы, вычислены таблицы для бомбъ 3-хъ-пуд. и 2-хъ-пудовой и для гранатъ $\frac{1}{3}$ пудовой и 6-ти-фунтовой, бросаемыхъ подъ угломъ въ 45 градусовъ. На примѣръ, если начальная скорость a' бросанія двухъ-пудовой бомбы = 400 фут., то найдется начальная ско-

рость 5-ти-пудовой бомбы $a = a' \sqrt{\frac{kD'}{k'D''}} = 466$ фут. и соотвѣтствующія сей скорости изъ I-й таблицы отыщутся чрезъ интерполяцію величины $x = 607$ саж., $y = 183$ саж., $t = 35$ полус., $v = 312$ фут. и $\alpha = 55°46'$, помощію коихъ будемъ имѣть, относительно 2-хъ-пудовой бомбы, бросаемой съ начальною скоростію 400 футъ въ секунду, горизонтальную дальность паденія $x' = \frac{k'D''x}{kD'} = 447$ саж., самую большую высоту полета $y' = \frac{k'D''y}{kD'} = 135$ саж., время полета $t' = t\sqrt{\frac{k'D''}{kD'}} = 30$ полусек., скорость при паденіи $v' = v\sqrt{\frac{k'D''}{kD'}} = 268$ фут., и уголъ паденія $\alpha' = \alpha = 55°46'$

ТАБЛИЦА I-я.

Для пяти пудовой бомбы.

Начальная скорость.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета.	Скорость бомбы при паденіи.	Уголъ паденія бомбы.
Футы.	Саженъ.	Саженъ.	Полусекунды.	Футы.	Град. мин.
150	94	24	13	141	46°25′
200	159	42	17	180	47..33
250	236	63	21	215	49..
300	319	88	25	244	50..32
350	406	115	28	268	51..59
400	494	144	31	290	53..38
450	580	173	34	307	55..19
500	664	204	37	322	56..43
550	744	235	40	335	58..13
600	821	266	43	347	59..46
650	893	296	45	356	60..58
700	961	326	47	364	62.. 8
750	1025	356	49	372	63..19
800	1085	385	51	380	64..27
850	1141	414	53	387	65..33
900	1194	442	54	394	66..38
950	1243	470	56	401	67..41
1000	1289	497	57	408	68..40

ТАБЛИЦА II.

Для трехъ пудовой бомбы (*).

Начальная скорость.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета.	Скорость бомбы при паденіи.	Уголъ паденія бомбы.
Футы.	Саженъ.	Саженъ.	Полусекунды.	Футы.	Град. мин.
150	94	24	13	139	46° 37′
200	157	42	17	177	47.. 54
250	232	62	21	211	49.. 28
300	311	87	24	238	51.. 3
350	393	113	27	261	52.. 41
400	475	140	30	281	54.. 26
450	555	169	34	297	56. . 4
500	632	198	37	311	57.. 37
550	706	226	40	323	59.. 14
600	776	256	42	335	60.. 39
650	841	284	44	342	61.. 54
700	903	313	46	350	63.. 9
750	959	340	48	358	64.. 22
800	1013	367	50	365	65.. 32
850	1062	393	52	372	66.. 40
900	1109	420	53	379	67..47
950	1152	446	55	386	68.. 49
1000	1192	451	56	392	69.. 47

(*) Въ нашу Артиллерію введенъ недавно новый калиберъ, 3-хъ пудовая мортира, для которой всѣ главнѣйшія обстоятельства, при бросаніи необходимыя, находятся здѣсь вычисленными, по даннымъ слѣдующимъ: діаметръ трехъ пудовой бомбы k=10,6 дюй.=0,88333 фут.; вѣсъ оной и при томъ совсѣмъ снаряженной=около 5 пуд. 11 фут.; плотность ея въ отношеніи къ водѣ, или величина D'=5,2148; плотность въ отношеніи къ воздуху, или величина $\frac{D'}{D}$=4370,6; LD'=0,7197251; $L\left(\frac{D'}{D}\right)$=3,6405459; и Lk=9,9461246. Сіи величины должны быть причислены къ таблицѣ § 55.

ТАБЛИЦА III-я.

Для двухъ пудовой бомбы.

Начальная скорость.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета.	Скорость бомбы при паденіи.	Уголъ паденія.
Футы.	Саженъ.	Саженъ.	Полусекунды	Футы.	Град. мин
150	93	24	13	137	46° 59′
200	155	41	17	174	48.. 30
250	224	62	21	205	50.. 16
300	299	85	24	230	51.. 59
350	374	110	27	251	53.. 54
400	447	135	30	268	55.. 46
450	517	161	33	281	57.. 26
500	585	188	36	294	59.. 14
550	648	214	38	304	60.. 45
600	707	239	40	312	62.. 7
650	761	265	42	320	63.. 29
700	812	290	44	328	64.. 48
750	859	314	45	335	66.. 4
800	902	338	47	341	67.. 18
850	943	362	49	348	68.. 28
900	983	385	50	355	69.. 34
950	1021	407	51	361	70.. 35
1000	1058	430	53	367	71.. 30

ТАБЛИЦА IV.

Для $\frac{1}{2}$ пудовой гранаты.

Начальная скорость	Горизонт. дальность полета.	Высота полета.	Время полета.	Скорость бомбы при паденіи.	Уголъ паденія бомбы.
Футы.	Саженъ.	Саженъ.	Полу-секунды.	Футы.	Град. мин.
150	89	24	13	133	47° 57′
200	144	40	17	165	50.. 24
250	205	58	20	190	52.. 13
300	266	78	23	210	54.. 35
350	326	100	26	225	56.. 43
400	381	122	29	238	58.. 52
450	433	143	31	249	60.. 47
500	480	164	33	256	62.. 28
550	524	184	35	265	64.. 7
600	563	205	37	272	65.. 41
650	599	225	38	279	67.. 13
700	632	243	40	286	68.. 59
750	663	260	42	292	69.. 57

ТАБЛИЦА V.

Для 6-ти-фунтовой гранаты.

Начальная скорость.	Горизонт. дальность полета.	Высота полета.	Время полета.	Скорость бомбы при паденіи.	Уголъ паденія бомбы.
Футы.	Саженъ.	Саженъ.	Полу-секунды	Футы.	Град. мину.
150	82	22	12	125	49° 50′
200	129	37	16	150	52.. 38
250	176	52	19	168	55.. 39
300	215	68	22	181	58.. 4
350	260	86	24	192	60.. 54
400	296	102	26	200	63.. 5
450	328	118	28	208	65.. 9
500	356	133	30	215	67.. 8
550	382	147	33	222	68.. 56

IV. *Объ углѣ возвышенія, соотвѣтствующемъ самой большой горизонтальной дальности бросанія.*

§ 102. Поелику отношеніе между x и y въ точномъ видѣ изобразить не возможно, то сыщемъ оное по приближенію. Для сего перенесемъ начало координатъ въ вершину D (Ф. 17) кривой и представимъ себѣ, что снарядъ брошенъ въ горизонтальномъ направленіи DQ со скоростію $=\sqrt{\frac{g}{cn}}$, которую онъ получилъ уже въ своемъ полетѣ, достигнувъ до сей точки D (§ 85). Означимъ сію скорость чрезъ a', длину дуги DM чрезъ s′, координаты DQ и QM чрезъ x' и y', и уголъ составляемый направленіемъ вѣтви въ точкѣ M съ горизонтальною осью DQ чрезъ α'. Очевидно, что если въ уравненіи (p′) § 82. Сдѣлаемъ $\theta=o$, и перемѣнимъ a въ a', x въ x', y въ y', s въ s′ и $dp=d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ въ $-d\left(\frac{dy'}{dx'}\right)=-dtg\,\alpha'$ $=-\frac{d\,\alpha'}{cos^2\alpha'}$, то касательно предположеннаго движенія будемъ имѣть

$$\frac{da'}{dx'}=\frac{ge^{2cs'}cos^2\alpha'}{a'^2}$$

или, по причинѣ $dx' = ds' \cos \alpha'$,

$$\frac{d\alpha'}{ds'} = \frac{g e^{2cs'} \cos^3 \alpha'}{a'^2}.$$

Для краткости сдѣлавъ $2c = m$ и $\frac{g}{a'^2} = N$, сіи выраженія примутъ видъ

$$\frac{d\alpha'}{dx'} = N e^{ms'} \cos^2 \alpha' \text{ и } \frac{d\alpha'}{ds'} = N e^{ms'} \cos^3 \alpha',$$

изобразимъ теперь y' въ функціи отъ x' посредствомъ ряда

$$y' = Ax'^2 + Bx'^3 + Cx'^4 + Dx^5 + \ldots,$$

въ который не входитъ членъ содержащій первую степень перемѣннаго x', ибо для $x' = o$ и $\frac{dy'}{dx'} = tg\,\alpha = o$. Предстоящіе A, B, C, D, сего ряда найдутся удобно чрезъ послѣдовательное дифференцированіе, ибо первый дифференціалъ даетъ

$$tg\ \alpha' = 2Ax' + 3Bx'^2 + 4Cx'^3 + 5Dx'^4 + \ldots,$$

составляя же слѣдующіе, получимъ

$$\frac{d\alpha'}{dx' \cdot \cos^2 \alpha'} \text{ или } Ne^{ms} = 2A + 2.3Bx' + 3.4Cx'^2 + 4.5Dx'^3 + \ldots,$$

$$mNe^{ms'} \frac{ds'}{dx'} \text{ или } \frac{mNe^{ms'}}{\cos \alpha'} = 2.3B + 2.3.4Cx' + 3.4.5Dx'^2 + \ldots,$$

$$mN\left\{\frac{me^{ms'}}{\cos \alpha'} \cdot \frac{ds'}{dx'} + \frac{e^{ms'} \sin \alpha'}{\cos^2 \alpha'} \frac{d\alpha'}{dx'}\right\} = mN\left(\frac{m\ e^{ms'}}{\cos^2 \alpha'} +\right.$$

$Ne^{2ms'}\sin\alpha') = 2.3.4C + 2.3.4.5Dx' + \ldots,$

$$mN\left(\frac{m^2e^{ms'}}{\cos^2\alpha'} + 4mNe^{2ms'}tg\alpha' + N^2e^{3ms'}\cos\alpha'\right) = 2.3.4.5D + \ldots$$

и проч.

Отсюда при положеніи $x' = o$, которое даетъ $s' = o$ и $\alpha' = o$, найдется $A = \frac{1}{2}N$,

$$B = \frac{mN}{2.3},\ C = \frac{m^2N}{2.3.4},\ D = \frac{m^3N + mN^3}{2.3.4.5},\ E = \frac{m^4N + 7m^2N^3}{2.3.4.5.6},$$

$$F = \frac{m^5N + 32m^3N^3 - 3mN^5}{2.3.4.5.6.7},\ G = \frac{Nm^6 + 122m^4N^3 - 55m^2N^5}{2.3.4.5.6.7.8},$$

и проч.

Поставивъ сіи величины въ предъидущій рядъ и раздѣливъ на N, получимъ уравненіе

$$\frac{y'}{N} = \frac{x'^2}{2} + \frac{mx'^3}{2.3} + \frac{m^2x'^4}{2.3.4} + \frac{(m^3 + N^3)}{2.3.4.5}mx'^5$$

$$+ \frac{(m^2 + 7N^2)}{2.3.4.5.6}m^2x'^6 + \frac{(m^4 + 32m^2N^2 - 3N^4)}{2.3.4.5.6.7}mx'^7 + \ldots \quad (1),$$

изъ котораго по извѣстной ординатѣ $DP = y'$, найдется соотвѣтствующая абсцисса висходящей вѣтви $PM = x'$; но той же самой ординатѣ принадлежитъ и абсцисса PM′ восходящей вѣтви, различающаяся отъ первой величиною и знакомъ, и такъ сдѣлавъ въ послѣднемъ выраженіи $-x' = x''$, будемъ имѣть для опредѣленія абсциссы PM′ уравненіе

$$\frac{y'}{N}=\frac{x''^2}{2}-\frac{mx''^3}{2.3}+\frac{m^2x''^4}{2.3.4}-\frac{(m^2+N^2)}{2.3.4.5}mx''^5+\frac{(m^2+7N^2)}{2.3.4.5.6}$$

$$m^2x''^6-\frac{(m^4+32m^2N^2-3N^4)}{2.3.4.5.6.7}mx''^7\ldots\ (2).$$

Послѣ сего сложивъ PM и PM′, получимъ горизонтальную хорду MM′. Чтобы имѣть горизонтальную дальность AC, то должно въ предъидущихъ уравненіяхъ абсциссы x' и x'' отнести къ наибольшей высотѣ $y'=$DB. А какъ при точкѣ A бросанія касательная съ горизонтомъ составляетъ уголъ возвышенія равный θ, посему взявъ дифференціалъ уравненія (2) и сдѣлавъ $\frac{dy'}{dx''}=tg\,\theta$, получимъ $\frac{tg\,\theta}{N}=x''-\frac{mx''^2}{2}+\frac{m^2x''^3}{2.3}$

$$\frac{(m^2+N^2)}{2.3.4}mx''^4+\frac{(m^2+7N^2)}{2.3.4.5}m^2x''^5-\ldots\ldots$$

изъ сего уравненія найдется горизонтальная дальность $x''=$ AB восходящей вѣтви, а изъ предпослѣднихъ двухъ уравненій извѣстны будутъ наибольшая высота DB $=y'$ и горизонтальная дальность BC$=x'$ нисходящей, послѣ сего сложивъ x' и x'' получимъ горизонтальную дальность AC$=x=x'+x''$, которая очевидно измѣняется зависимо отъ угла возвышенія θ, начальной скорости a и количества $m=2c$.

§ 105. Удержавъ послѣднія два количества постоянными, изслѣдуемъ при какомъ углѣ возвышенія горизонтальная дальность бываетъ самая большая. По правилу наибольшихъ и наименьшихъ величинъ дифференцируя уравненіе $x = x' + x''$ въ отношеніи θ, будемъ имѣть

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx'}{d\theta} + \frac{dx''}{d\theta} = 0;$$

но не опасаясь ощутительной погрѣшности, можно въ уравненіяхъ (1) и (2) откинуть весьма малые члены, содержащіе степени количества $N = \frac{\sigma}{a'^2}$ и вмѣсто оныхъ взять слѣдующія уравненія

$$\frac{a'^2 y'}{g} = \frac{x'^2}{2} + \frac{mx'^3}{2.3} + \frac{m^2 x'^4}{2.3.4} + \frac{m^3 x'^5}{2.3.4.5} + \ldots\ldots$$

и

$$\frac{a'^2 y'}{g} = \frac{x''^2}{2} - \frac{mx''^3}{2.3} + \frac{m^2 x''^4}{2.3.4} - \frac{m^3 x''^5}{2.3.4.5} + \ldots\ldots,$$

въ которыхъ скорость снаряда въ вершинѣ кривой $= a'$ и наибольшая высота $= y'$, суть функціи отъ θ, и коихъ дифференціалы взятые, относительно сей перемѣнной будутъ

$$\frac{d(a'^2 y')}{g d\theta} = \left(x' + \frac{mx'^2}{2} + \frac{m^2 x'^3}{2.3} + \frac{m^3 x'^4}{2.3.4} + \ldots\ldots \right) \frac{dx'}{d\theta}$$

и

$$\frac{d(a^2y')}{gd\theta} = \left(x'' - \frac{mx''^2}{2} + \frac{m^2x''^3}{2.3} - \frac{m^3x''^4}{2.3.4} + \ldots\ldots\right)\frac{dx''}{d\theta};$$

отсюда, по причинѣ $\frac{dx''}{d\theta} = \frac{dx'}{d\theta}$ и $\frac{mx'^2}{2} + \frac{m^2x'^3}{2.3} + \frac{m^3x'^4}{2.3.4} + \ldots = \frac{mx''^2}{2} - \frac{m^2x''^3}{2.3} + \frac{m^3x''^4}{2.3.4} \ldots$, получимъ

$$o = (x' + x'')\frac{dx'}{d\theta},$$

по сему $\frac{dx'}{d\theta} = o$ и $\frac{d(a'^2y')}{d\theta} = o$. Слѣдовательно уравненіе, изъ котораго должно опредѣлить уголъ возвышенія для самой большой горизонтальной дальности, составляется бравъ, относительно къ Q, дифференціалъ произведенія изъ квадрата скорости въ вершинѣ на самую большую высоту и сдѣлавъ оный равнымъ нулю. Мы имѣемъ (§ 85)

$$a'^2 = \frac{g}{cn} = \frac{\frac{g}{c}\cdot\cos^2\theta}{\frac{g}{ca^2} + \sin\theta + \cos^2\theta.\log tg\,(45^\circ + \frac{1}{2}\theta)}$$

величина же y' въ функціи Q найдется по способу, предложенному въ предъидущемъ §. Но онъ приводитъ къ результату чрезвычайно сложному и малоприблизительному, то во избѣжаніе сего, полезнѣе ограничиться простѣй-

шею величиною (§ 62)

$$y' = \frac{1}{2c} log\left(1 + \frac{ca^2 sin^2\theta}{g}\right),$$

опредѣляющею самую большую высоту восхожденія снаряда, брошеннаго вверхъ со скоростію $= asin\theta$ равною скорости бросанія въ вертикальномъ направленіи разложенной.

Симъ образомъ для опредѣленія угла, θ будемъ имѣть уравненіе

$$o = \frac{d\left\{\frac{\frac{g}{2c^2}.cos^2\theta log\left(1 + \frac{ca^2}{g} sin^2\theta\right)}{\frac{g}{ca^2} + sin\theta + cos^2\theta log\, tg\left(45^0 + \frac{1}{2}\theta\right)}\right\}}{d\theta};$$

освобождая оное отъ постояннаго множителя $\frac{g}{2c^2}$ и сдѣлавъ для краткости $\frac{ca^2}{g} = \beta$, получимъ

дифференціалъ числителя равный

$$-2d\theta\, cos\theta.sin\theta.log(1 + \beta sin^2\theta) + \frac{2\beta d\theta sin\theta cos^5\theta}{1 + \beta sin^2\theta}$$

дифференціалъ знаменателя равный

$$d\theta\, cos\theta - 2d\theta.sin\theta.cos\theta.log\, tg\left(45 + \frac{1}{2}\theta\right) + \frac{d\theta.cos^2\theta}{2cos^2\left(45^0 + \frac{1}{2}\theta\right) tg\left(45^0 + \frac{1}{2}\theta\right)}$$

или, по причинѣ $2cos^2\left(45^0 + \frac{1}{2}\theta\right) tg\left(45^0 + \frac{1}{2}\theta\right) = 2sin\left(45^0 + \frac{1}{2}\theta\right)cos\left(45^0 + \frac{1}{2}\theta\right) = cos\theta$, равный

$$2d\theta.cos\theta - 2d\theta.sin\theta.cos\theta log\, tg\left(45^0 + \frac{1}{2}\theta\right);$$

отсюда дифференціалъ предложенной дроби

равный нулю, по раздѣленіи на $2d\theta cos\theta$ и освобожденіи отъ общаго знаменателя, будетъ

$$\left\{\frac{1}{\beta}+sin\theta+cos^2\theta log tg\left(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta\right)\right\}\left\{\cdot sin\theta log(1+\beta sin^2\theta)+\right.$$

$$\left.\frac{\beta\, sin\,\theta\, cos^2\,\theta}{1+\beta\, sin^2\,\theta}\right\}-cos^2\,\theta\, log\,(1+\beta\, sin^2\,\theta)$$

$$\left\{1-sin\theta\, log tg\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta)\right\}=o,$$ уничтоживъ же знаменателя $1+\beta sin^2\theta$ и сокративъ члены, получимъ

$$sin\theta cos^2\theta\left\{1+\beta sin\theta+\beta cos^2\theta\, log tg\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta)\right\}-$$

$$(1+\frac{1}{\beta}sin\theta)(1+\beta sin^2\theta)log(1+\beta sin^2\theta)=o.....(y'),$$

сіе уравненіе, будучи рѣшено въ отношеніи къ θ или по правилу ложнаго положенія или чрезъ разложеніе въ рядъ, опредѣлитъ уголъ возвышенія, подъ коимъ происходитъ наибольшая горизонтальная дальность. Сей уголъ, какъ видно, выходитъ тѣмъ менѣе, чѣмъ болѣе количество $\beta=\frac{ca^2}{S}$, то есть, чѣмъ болѣе начальная скорость снаряда и чѣмъ менѣе его поперечникъ и относительный его вѣсъ.

§ 104. Слѣдующая таблица составленная Гютономъ, показываетъ углы возвышенія, подъ коими происходитъ самая большая дальность полета.

Начальная скорость, раздѣленная на окончательную скорость.	Углы возвышенія.	Дальность полета, раздѣленная на высоту, принадлежащую окончательной скорости.
0,6919	44° 0′	0,4110
0,9445	43..15	0,6148
1,1980	42..39	0,8176
1,4515	41..45	1,0210
1,7050	41.. 0	1,2244
1,9585	40..15	1,4278
2,2120	39..30	1,6312
2,4655	38..45	1,8346
2,7190	38 . 0	2,0379
2,9725	37..15	2,2413
3,2260	36..30	2,4447
3,4795	35..45	2,6481
3,7330	35.. 0	2,8515
3,9865	34..15	3,0549
4,2400	33..30	3,2583
4,4935	32..45	3,4616
4,7470	32.. 0	3,6650
5,0000	31..15	3,8684

Первый столбецъ сей таблицы содержитъ числа или величины $\sqrt{\beta} = \frac{a}{\sqrt{\frac{g}{c}}}$, соотвѣтственныя различнымъ угламъ возвышенія θ, помѣщеннымъ во 2-мъ столбцѣ, и происшедшія отъ

раздѣленія начальной скорости снаряда на постоянную окончательную скорость онаго, которая показана въ таблицѣ § 61: сіи числа находятся по уравненію (у′), разрѣшивъ оное въ отношеніи β. Третій же столбецъ содержитъ числа происшедшія отъ раздѣленія самой большой дальности на высоту, которая принадлежитъ окончательной скорости, и которую также можно имѣть изъ таблицы помянутаго параграфа. И такъ, дабы руководствоваться предложенною здѣсь таблицею, должно раздѣлить данную начальную скорость ядра на окончательную скорость онаго, и къ частному отъ сего происшедшему пріискать, въ 1-мъ столбцѣ таблицы, ближайшее число; тогда соотвѣтственное число во 2-мъ столбцѣ покажетъ уголъ возвышенія, подъ коимъ происходитъ самая большая дальность, а число въ 3-мъ столбцѣ, бывъ умножено на высоту, принадлежащую окончательной скорости, опредѣлитъ сію дальность съ довольною точностію.

§ 105. Для примѣра положимъ, что требуется найти уголъ возвышенія, отъ котораго происходитъ самая большая дальность полета 5-ти пудовой бомбы, брошенной со скоростію въ 400 футовъ въ секунду.

Окончательная скорость 5-ти пудовой бомбы =517 фут. (табл. § 61), а высота принадлежащая сей скорости=4157 футъ, слѣдовател. $\frac{400}{517}$=0,7737; сему частному числу, заключающемуся между числами 0,6910 и 0,9445, въ 1-мъ столбцѣ предъидущей таблицы, соотвѣтствуетъ уголъ возвышенія равный 43° 45′. Умноживъ число 0,4775, среднее между числами 0,4110 и 0,6148 находящимися въ 3-мъ столбцѣ, на 4157 или высоту принадлежащую окончательной скорости, найдемъ самую большую дальность полета=285 саж. Та же 5 пудовая бомба, брошенная со скоростію въ 500 футъ въ секунду, летитъ по самое дальное разстояніе=376 саж., подъ угломъ возвышенія въ 43° 11′; брошенная же со скоростію въ 1000 футовъ летитъ на самое дальное разстояніе = 836 саж. подъ угломъ возвышенія въ 40° 19′, а со скоростію въ 2000 футъ летитъ на самое дальное разстояніе = 1758 саж. подъ угломъ возвышенія въ 34° 36′.

Уголъ возвышенія, соотвѣтствующій самой большой дальности полета 24-хъ фунтоваго ядра, брошеннаго со скоростію 2000 футъ въ секунду равенъ 32°.

Изъ сего видно, что параболическая теорія, по которой самая большая дальность полета постоянно выходитъ при углѣ возвышенія въ 45 градусовъ, ни мало не согласуется съ опытами, даже при выстрѣлахъ производимыхъ самыми большими бомбами и особенно при сильныхъ зарядахъ.

V. *Уравненіе кривой линіи описываемой снарядомъ, брошеннымъ подъ небольшимъ угломъ возвышенія.*

§ 106. Когда уголъ бросанія $CAB = \theta$ (Фиг. 18) будетъ такъ малъ, что тѣло поднимется на небольшую высоту отъ горизонтальной оси Ax, тогда можно найти, по приближенію, уравненіе въ x и y части ADB кривой линіи, находящейся надъ сею осью. Въ самомъ дѣлѣ, поелику тогда касательная къ кривой, во всемъ пространствѣ сей части, почти горизонтальная, то будетъ количество p весьма малое, котораго презрѣвъ квадратъ получимъ $\sqrt{1+p^2} = 1$, а слѣдовательно

$$ds = dx\sqrt{1+p^2} = dx, \text{ и } s = x.$$

Впрочемъ мы дойдемъ до выводовъ гораздо точнѣйшихъ, если количество p заключающее-

ся почти между o и $tg\,\theta$, относительно всѣхъ точекъ кривой линіи, сдѣлаемъ $= tg\frac{1}{2}\theta$. Но тогда

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\theta},\quad ds = dx\sqrt{1+d^2} = \frac{dx}{\cos\frac{1}{2}\theta} \text{ и } s = \frac{x}{\cos\frac{1}{2}\theta};$$

вводя послѣднюю величину въ уравненіе (p′) § 82, и сдѣлавъ для краткости $\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\theta} = E$ и $2c = m$, будемъ имѣть

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{ge^{mEx}}{a^2\cos^2\theta}$$

отсюда бравъ интегралъ и выводя постоянную изъ условія $x = o$ и $p = tg\,\theta$ для точки бросанія A, найдется

$$p = tg\,\theta - \frac{g}{mEa^2\cos^2\theta}\,(e^{mEx} - 1) \ldots (z').$$

Умноживъ сіе уравненіе на dx и замѣтивъ, что $pdx = dy$, будемъ имѣть

$$dy = dx.\ tg\,\theta - \frac{g}{mEa^2\cos^2\theta}\,(e^{mEx}dx - dx);$$

потомъ взявъ интегралъ и опредѣливъ постоянную по условію $x = o$ и $y = o$ для точки бросанія A, получимъ

$$y = x\,tg\theta - \frac{g}{m^2E^2a^2\cos^2\theta}\,(e^{mEx} - mEx - 1) \ldots (a'').$$

Вотъ требуемое уравненіе кривой ADB, къ которомъ первый членъ $x\,tg\,\theta$ предотавляетъ

ординату NP прямой AC, которую бы описало брошенное тѣло, не бывъ подвержено дѣйствію тяжести, второй же членъ представляетъ, въ каждой точкѣ кривой, высоту MN, съ которой тѣло побуждаемое тяжестію нисходитъ въ сопротивляющейся срединѣ.

§ 107. Назначая перемѣнному x различныя величины и выводя изъ уравненій (z′) и (a″), соотвѣтственныя величины для y и $p = tg\,\alpha$, можно будетъ построить кривую ADB и опредѣлить положеніе касательной въ каждой ея точкѣ. Сіи уравненія могутъ послужить и къ продолженію кривой далѣе точки B; онѣ будутъ довольно точны, если только величина p не престанетъ быть весьма малою, въ противномъ же случаѣ должно прибѣгнуть къ прежде выведеннымъ формуламъ § 94.

Изъ уравненія (a″), представляя его въ видѣ

$$e^{mEx} - mEx\left(1 + \frac{mEa^2 \sin 2\theta}{2g}\right) = 1 - \frac{m^2 E^2 a^2 y \cos^2\theta}{g},$$

для всякой данной ординаты $+y$ или $-y$, смотря потому будетъ ли предметъ выше или ниже горизонта орудія, найдется соотвѣтствующая абсцисса x по приближенію.

§ 108. Наибольшая высота полета или наи-

большая ордината DE кривой линіи находится весьма удобно; ибо въ вершинѣ D должно быть $p=o$, и такъ уравнивъ нулю выше найденное выраженіе для p, и рѣшивъ происшедшее отъ сего уравненіе въ отношеніи e^{mEx}, получимъ

$$e^{mEx}=1+\frac{mEa^2\sin\theta\cos\theta}{g}, \text{ или } e^{mEx}=1+\frac{mEa^2\sin 2\theta}{2g} \ldots\ldots (b'').$$

и отсюда

$$x=AE=\frac{1}{mE}\log\left\{1+\frac{mEa^2\sin 2\theta}{2g}\right\};$$

поставивъ сіи величины для e^{mEx} и x въ уравненіе (a''), получимъ наибольшую ординату

$$DE=\frac{1}{mE}\left(tg\,\theta+\frac{g}{mEa^2\cos^2\theta}\right)\log\left(1+\frac{mEa^2\sin 2\theta}{2g}\right)-\frac{1}{mE}tg\,\theta \ldots\ldots (c'').$$

§ 109. Что касается до горизонтальной дальности полета, то она найдется уравнивъ нулю величину y; но тогда будемъ имѣть трансцендентное уравненіе

$$e^{mEx}=1+mEx+\frac{m^2E^2a^2\sin 2\theta}{2g}\cdot x \ldots\ldots (d''),$$

изъ коего не иначе, какъ по приближенію найдется численная величина $x=AB$, когда извѣстны будутъ a, c, θ. Развернувъ сіе уравненіе въ рядъ и удержавъ при семъ первыя двѣ степени отъ x, составимъ уравненіе почти

одинакое съ найденнымъ въ § 67, изъ котораго выводили разныя послѣдствія, обыкновенно случающіяся при выстрѣлахъ прицѣльныхъ и рикошетныхъ. Но для большей вѣрности въ исчисленіяхъ, здѣсь мы избѣгаемъ сего разложенія, которое ведетъ къ рядамъ мало приблизительнымъ, и къ формуламъ хотя простымъ, но не точнымъ. Руководствуясь же таблицею, составленною Фонрейхомъ для послѣдовательныхъ величинъ неопредѣленностепеннаго количества e^{mEx}, не трудно будетъ при рѣшеніи разнаго рода заданій, выложить въ числахъ всѣ формулы съ симъ количествомъ.

§ 110. Назвавъ абсциссу восходящей вѣтви, выводимую изъ уравненія (b″), чрезъ x' и сравнивъ оную съ горизонтальною дальностію x, получимъ по надлежащемъ сокращеніи, не зависимо отъ начальной сторости a, слѣдующее простое уравненіе

$$e^{mEx'} = \frac{e^{mEx} - 1}{mEx} \ldots\ldots (e''),$$

которое ведетъ къ заключенію, что абсцисса x' восходящей вѣтви болѣе одной половины горизонтальной дальности x. Въ самомъ дѣлѣ,

если разложимъ неопредѣленно-степенныя количества, заключающіяся въ семъ уравненіи, въ ряды, кои будутъ сходящіеся для какихъ либо величинъ x и x', то будемъ имѣть по сокращеніи

$$x' + \frac{mEx'^2}{1.2} + \frac{m^2E^2x'^3}{1.2.3} + \ldots = \frac{x}{2} + \frac{mEx^2}{1.2.3} + \frac{m^2E^2x^3}{1.2.3.4} + \ldots.$$

или

$$\left(\frac{x}{2} - x'\right) + \frac{mE}{1.2}\left(\frac{x^2}{3} - x'^2\right) + \frac{m^2E^2}{1.2.3}\left(\frac{x^3}{4} - x'^3\right)$$
$$+ \frac{m^3E^3}{1.2.3.4}\left(\frac{x^4}{5} - x'^4\right) + \ldots = 0.$$

Дабы сумма членовъ, сходящагося сего ряда равна была нулю, должно принять $x' > \frac{x}{2}$, въ противномъ случаѣ когда будетъ $x' < \frac{x}{2}$, или $x' = \frac{x}{2}$, всѣ члены сдѣлаются положительными и приведутъ къ суммѣ не равной нулю. Бравъ логарифмъ уравненія (e''), находимъ

$$x' = \frac{1}{mE} \log\left(\frac{e^{mEx} - 1}{mEx}\right),$$

и развернувъ обыкновеннымъ образомъ въ строку

$$\log\left(\frac{e^{mEx} - 1}{mEx}\right) = \log\left(1 + \frac{mEx}{2} + \frac{m^2E^2x^2}{2.3} + \frac{m^3E^3x^3}{2.3.4} + \ldots\right)$$
$$= \frac{mEx}{2} + \frac{m^2E^2x^2}{2.3.4} - \frac{m^4E^4x^4}{2.2.3.3.4.4.5} + \ldots\ldots,$$

получаемъ

$$x' = \frac{x}{2} + \frac{mEx^2}{2.3.4} - \frac{m^3 E^3 x^4}{2.2.3.3.4.4.5} + \ldots\ldots;$$

отношеніе каждаго члена, въ семъ ряду, къ своему предшествующему есть менѣе, чѣмъ произведеніе $m^2E^2x^2$, которое въ обыкновенныхъ случаяхъ практики, составляетъ дробь весьма малую.

§ 111. Если извѣстны горизонтальная дальность $= x$ и уголъ возвышенія $= \theta$, то изъ предъидущаго уравненія получимъ начальную скорость

$$a = \sqrt{\frac{2g}{m^2E^2x\sin 2\theta}}\ (e^{mEx} - mEx - 1) \ldots\ldots (f);$$

изъ онаго же въ случаѣ данныхъ, горизонтальной дальности x и начальной скорости a, будемъ имѣть для угла возвышенія θ, чрезъ первое приближеніе, когда сдѣлаемъ $E = \frac{1}{\cos\frac{x}{2}\theta} = 1$ уравненіе вида

$$\sin 2\theta' = \frac{2g}{m^2a^2x}\ (e^{mx} - mx - 1),$$

а чрезъ второе приближеніе, когда сдѣлаемъ $E' = \frac{1}{\cos\frac{x}{2}\theta'}$,

$$\sin 2\theta'' = \frac{2g}{m^2E'^2a^2x}\ (e^{mE'x} - mE'x), \text{ и проч.}$$

Вообще для извѣстныхъ координатъ y и x,

опредѣляющихъ положеніе предмета и для даннаго угла возвышенія θ, будемъ имѣть изъ уравненія (a″) начальную скорость

$$a = \frac{1}{mE\cos\theta}\sqrt{\frac{g\cdot(e^{mEx} - mEx - 1)}{x\,tg\,\theta - y}}.$$

§ 112. Поставляя въ уравненіе $\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} = -g$ (§ 82) вмѣсто dp выше приведенную величину $= -\frac{ge^{mEx}dx}{a^2\cos^2\theta}$ (§ 107), потомъ выведя dt, получимъ

$$dt = \frac{e^{\frac{1}{2}mEx}dx}{a\cos\theta},$$

и отсюда время движенія

$$t = \frac{e^{\frac{1}{2}mEx} - 1}{\frac{1}{2}mEa\cos\theta} \ldots\ldots(g'').$$

Скорость снаряда по направленію касательной въ каждой точкѣ пути имъ описываемаго равна

$$\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}} = \frac{dx}{dt}\sqrt{1 + p^2},$$

слѣдовательно, назвавъ оную v и поставивъ вмѣсто $\frac{dx}{dt}$ равную величину $\frac{a\cos\theta}{e^{\frac{1}{2}mEx}}$, будемъ имѣть

$$v = \frac{a\cos\theta}{e^{\frac{1}{2}mEx}\cos\alpha} \ldots\ldots(h'').$$

§ 113. Положимъ, что вѣсъ ядра и зарядъ

остаются постоянными, и что изъ одного и того же орудія подъ двумя небольшими углами возвышенія θ и θ', мало между собою различающимися, произведены два выстрѣла и для каждаго изъ нихъ найдено положеніе перваго паденія ядра. Пусть величины $x=l$, $y=h$ опредѣляютъ паденіе ядра; а $x=l'$, $y=h'$ другаго ядра. Очевидно, что начальная скорость a и величина m, для сихъ двухъ выстрѣловъ, останутся неизвѣстными, и для отысканія оныхъ, будемъ имѣть два уравненія (a''),

$$h=l\,tg\theta-\frac{g}{m^2E^2a^2\cos^2\theta}(e^{mEl}-mEl-1),$$

$$h'=l'tg\theta'-\frac{g}{m^2E'^2a^2\cos^2\theta'}(e^{mE'l'}-mE'l'-1);$$

изъ коихъ удобно исключается a, и найдется

$$(h-l\,tg\theta)(e^{mE'l'}-mE'l'-1)E^2\cos^2\theta=(h'-l'tg\theta')e^{mEl}-mEl-1)E'^2\cos^2\theta'\ldots\ldots(i''),$$

$$a=\frac{1}{mE\cos\theta}\sqrt{\frac{g(e^{mEl}-mEl-1)}{l\,tg\theta-h}},$$

Потомъ по извѣстной величинѣ $m=2c=\frac{6\lambda D}{4kD'}=\frac{3\lambda D}{2kD'}$, получимъ коеффиціентъ сопротивленія

$$\lambda=\frac{2kmD'}{3D},$$

Впрочемъ можно допустить $\theta'=\theta$, лишь бы

только паденія ядра были отнесены къ двумъ мѣстностямъ, довольно между собою разли-нающимся; тогда вмѣсто предъидущаго уравненія (i″) будемъ имѣть простѣйшее

$$(h-ltg\theta)(e^{mEl'}-mEl'-1)=(h'-l'tg\theta)(e^{mEl}-mEl-1).$$

§ 114. Предъидущія формулы могутъ быть приложены въ практикѣ къ выстрѣламъ прицѣльнымъ и рикошетнымъ, отлогимъ и крутымъ. Пусть горизонтальное розстояніе AB (фиг. 14) гребня бруствера отъ орудія$=x$; высота CB сего бруствера отъ горизонта орудія$=y$; горизонтальное разстояніе самой возвышенной точки пути ядра$=x'$; горизонтальное разстояніе AK перваго паденія ядра на валгангъ$=x''$, высота IK$=y''$; наклоненіе кривой къ горизонту у гребня бруствера$=\alpha$; уголъ паденія ядра на валгангъ$=\alpha''$. Между сими величинами будемъ имѣть, по уравненіямъ (a″), (z′) и (b″), отношенія

$$y=xtg\theta-\frac{g}{m^2E^2a^2\cos^2\theta}(e^{mEx}-mEx-1).....(1),$$

$$y''=x''tg\theta-\frac{g}{m^2E^2a^2\cos^2\theta}(e^{mEx''}-mEx''-1)...(2),$$

$$tg\alpha=tg\theta-\frac{g}{mEa^2\cos^2\theta}(e^{mEx}-1).....(3),$$

$$tg\alpha''=tg\theta-\frac{g}{mEa^2\cos^2\theta}(e^{mEx''}-1).....(4),$$

$$e^{mEx'}-1=\frac{mEa^2\cos^2\theta tg\theta}{g}=\frac{mEa^2.\sin(2\theta)}{2g}.....(5);$$

помощію коихъ и уравненій (g″) и (h″), можно рѣшить всѣ задачи, предложенныя о рикошетной стрѣльбѣ.

§ 115. *Задача I.* Зная разстояніе AB отъ орудія до бруствера, высоту CB верхней точки гребня бруствера, высоту BR валганга, и приняв*ъ горизонтальное разстояніе Ad* самой возвышенной точки пути ядра произвольнымъ, однако же меньшимъ чѣмъ половина разстоянія AB: найти уголъ и скорость бросанія, разстояніе AK точки паденія и уголъ паденія ядра.

Въ сей задачѣ по даннымъ величинамъ x, y, y'', x', должно опредѣлить θ, a, x'' и α''. Взявъ въ соображеніе уравненія (1) и (5), которыя заключаютъ въ себѣ двѣ неизвѣстныя величины a и θ, и исключивъ a, будемъ имѣть

$$mE.(xtg\theta-y)(e^{mEx}-1)=(e^{mEx}-mEx-1)\,tg\,\theta;$$

отсюда найдется

$$tg\theta=\frac{mEy(e^{mEx'}-1)}{mEx\,e^{mEx'}-(e^{mEx}-1)}.....(6);$$

для первой приближенной величины искомаго

угла θ, можно положить $E = \frac{1}{\cos^{\frac{1}{2}}\theta} = 1$.

Начальная скорость будетъ извѣстна посредствомъ уравненія (5), которое даетъ

$$a\sqrt{\frac{2g(e^{mEx'}-1)}{mE.sin(2\theta)}} \ldots\ldots(7);$$

за симъ по правилу ложнаго положенія изъ уравненія (2) выведемъ x'', и вставивъ сію величину въ (4) получимъ a''. Впрочемъ разрѣшеніе уравненія (2) сказаннымъ способомъ мы замѣнимъ другимъ простѣйшимъ и для практики весьма точнымъ. Для сего вычтемъ уравненіе (2) изъ (1) и для краткости сдѣлаемъ $y - y'' = b$, $x'' - x = \delta$ = разстоянію, на которомъ ядро упадаетъ на валгангъ отъ боковаго бруствера; посредствомъ чего будемъ имѣть

$$b = \delta tg\theta + \frac{g}{m^2E^2a^2\cos^2\theta}\left\{e^{mEx}(e^{mE\delta}-1) - mE\delta\right\};$$

разлагая количество $e^{mE\delta}$ въ рядъ по степенямъ отъ δ и сокращая на mE, получимъ

$$b = \delta tg\theta + \frac{g}{mE\,a^2\cos^2\theta}\left\{e^{mEx}\left(\delta + \frac{mE\delta^2}{2} + \ldots\right) - \delta\right\}$$

или

$$b = \left\{\frac{g}{mEa^2\cos^2\theta}(e^{mEx}-1) - tg\theta\right\}\delta + \frac{ge^{mEx}\delta^2}{2a^2\cos^2\theta} + \ldots\ldots$$

Въ семъ ряду быстро убывающемъ, члены съ

δ^3, δ^4 и проч., безъ ощутительной погрѣшности, можно отбросить и составится, для опредѣленія искомой величины δ, уравненіе второй степени.

$$\delta^2 + \frac{2a^2\cos^2\theta}{ge^{mEx}}\left\{\frac{g}{mEa^2\cos^2\theta}\left(e^{mEx}-1\right)-tg\,\theta\right\}\delta = \frac{2ba^2\cos^2\theta}{ge^{mEx}},$$

которое, когда на мѣсто $tg\,\theta$ поставимъ равную величину взятую изъ уравненія (5), приводится къ виду

$$\delta^2 + \frac{2\delta}{mE}\left(1-e^{mE(x'-x)}\right) = \frac{2ba^2\cos^2\theta}{ge^{mEx}},$$

отсюда

$$\text{или } x''-x = \left(\frac{1-e^{mE(x'-x)}}{mE}\right)\left\{-1+\sqrt{1+\frac{2ba^2\cos^2\theta}{ge^{mEx}}\left(\frac{mE}{1-e^{mE(x'-x)}}\right)^2}\right\} \ldots (8).$$

Въ частномъ случаѣ когда $y = o$, должно быть также $mEx.\,e^{mEx'}-(e^{mEx}-1) = o$ (§ 110, e''); но тогда уравненіе (6) обращается въ неопредѣленный видъ, величина x' становится зависимою отъ x, и чтобы вопросъ сдѣлать опредѣленнымъ, то изъ четырехъ искомыхъ величинъ θ, a, x'' и α'', должно предположить одну извѣстную.

Примѣръ для 24-хъ фунтоваго ядра: пусть разстояніе $AB = x = 150$ саж. или 1050 футъ, высота бруствера $BC = y = 30$ фут., высота вал-

ганга BR$=y''=$23 фут., и сверхъ сего примемъ, что разстояніе самой возвышенной точки пути ядра $x'=\frac{2}{3}x=$700 футъ.

Вычисленіе угла θ посредствомъ уравненія (6), дѣлая въ немъ E$=$1:

L$(e^{mx})=mx$Le; L$(e^{mx'})=mx'$Le; Le$=$модулю$=$ 0,43429448; LLe$=\overline{1}$,6377843.

$m=2c$ (§ 55).....	$\overline{4}$,4951593		
Le.....	$\overline{1}$,6377843		
mLe	$\overline{4}$,1329436;	mLe	$\overline{4}$,1329436
x	3,0211893;	x'	2,8450980
	$\overline{1}$,1541329		$\overline{2}$,9780416
mxLe$=$L(e^{mx})	$=$ 0,1426044;	mxLe$=$L$(e^{mx'})$	$=$0,0950696
$e^{mx}=$1,588687;		mx	1,5163486
$e^{mx'}=$1,244714;			$\overline{1}$,6114182
		$mxe^{mx'}=$	0, 408713
		$-(e^{mx}-1)=$	$-$0, 588687
		знаменатель$=$	0, 020026$=z$;

m	$\overline{4}$,4951593
y	1,4771212
$e^{mx'}-1$.....	$\overline{1}$,3886588
Логар. числителя....	$\overline{3}$,3609393
z.....	$-$8,3015942
	9,0593451$=$L$tg\theta$,

уголъ $\theta=6°32'22''$

сдѣлавъ $E = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \frac{1}{\cos(3°16'11'')}$ или LE=0,0007075 въ уравненіи (6) и повторивъ вычисленіе, мы найдемъ почти ту же самую величину угла θ.

Вычисленіе начальной скорости a по формулѣ (7):

найдено выше для mx'Le ..... $\overline{2},9780416$

E ..... $\underline{0,0007075}$

$\overline{2},9787491$

mEx'Le = L($e^{mEx'}$) = 0,0952246

$e^{mEx'}$ = 1,245158

g=32,214.....1,5080447 ; m .... $\overline{4},4951593$

2 .....0,3010300 ; E .... $\underline{0,0007075}$

$e^{mEx'}$—1..... $\underline{1,3894461}$; $\sin(2\theta)$... $\underline{1,3546700}$

1,1985208 $\overline{5},8505368$

$\underline{-\overline{5},8505368}$

5,3479840 = L(a^2)

2,6739920 = L(a)

скорость a = 472,06 фут.

Вычисленіе величины $\delta = x'' - x$, по формулѣ (8): найдено предъ симъ

для $e^{mEx'}$ 0,0952246

также для e^{-mEx} ..... $\underline{0,1428369}$

$\overline{1},9523877$

$e^{mE(x'-x)}$ = 0,896164;

$1-e^{mE(x''-x)}=0{,}103836$

Логар. сего ..... $\bar{1}{,}0163479$

mE ..... $-4{,}4958668$

Логар. 1-го множителя $=2{,}5204811$

Логар. обращен. сего множ. $=\bar{5}{,}4795189$

квадрата его ..... $\bar{6}{,}9590378$; g ..... $1{,}5080447$

2 ..... $0{,}5010500$; e^{mEx} ..$0{,}1428369$

$1{,}6508816$

$b=y-y''=7$ фут..... $0{,}8450980$

a^2 ..... $5{,}3479840$

$\cos^2\theta$ ..... $\bar{1}{,}9945502$

$4{,}4474800$

$-1{,}6508816$

$\bar{1}{,}7965984=$ Лог. дроби подъ коренным знакомъ; величина сей дроби $=0{,}626035$; величина $\sqrt{1{,}626035}=1{,}27516$; 2-й множитель $=0{,}27516$;

Лог. 1-го множителя $=2{,}5204811$

2-го множителя $=\bar{1}{,}4395853$

$1{,}9600664=L(\delta)$

$\delta=x''-x=91$, 2 фут. $=13$ саж.

$x''=1141$ фут.

Вычисленіе угла паденія α'', посредствомъ уравненія (4):

mE ..... $\bar{4}{,}4958668$

αe ..... $\bar{1}{,}6377843$

x'' ..... $3{,}0572856$

$\bar{1}{,}1909367$

$mEx''Le = L(e^{mEx''}) = 0,1552161$

$e^{mEx''} = 1,429605$

g	1,5080447	mE	$\bar{4}$,4958668
$e^{mEx''}-1$.	$\bar{1}$,6330694;	$a^2\cos^2\theta$..	5,3423142
	1,1411141		1,8381810

—1,8381810

$\bar{1}$,3029331 = Лог. 2-го члена во 2 части;

2-й сей членъ = 0,200878.

Найдено выше $Ltg\theta = 9,0595451$; отсюда

$tg\ \theta = 0,114642$

—2-й членъ = —0,200878

—0,086236 = $tg\alpha''$

$Ltg\alpha'' = 8,935689$; уголъ $\alpha'' = -4°55'43''$.

Вычисленіе скорости паденія v по формулѣ (§ 112), $v = \frac{a\cos\theta}{e^{\frac{1}{2}mEx''\cos\alpha''}}$

по предъидущему

$\frac{1}{2}mEx''Le = 0,0776080;$

$\cos\alpha''$. .. 9,9983913

0,0759993; $a\cos\theta$... 2,6711571

—0,0759993

2,5951578 = Lv

скорость $v = 393,7$ фут.

Вычисленіе времени достиженія снаряда до

бруствера по формулѣ (§ 112), $t=\frac{e^{\frac{1}{2}mEx}-1}{\frac{1}{2}mEa\cos\theta}$;

$\frac{1}{2}mExLe=L(e^{\frac{1}{2}mEx})=0,0714184,$

$e^{\frac{1}{2}mEx}=1,1787$

$\frac{1}{2}mE$ ..... $\bar{4},1948368$

$a\cos\theta$..... 2,6711571; $e^{\frac{1}{2}mEx}-1$ .... $\bar{1},2522218$

$-2,8659939$ $\quad -\bar{2},6859939$

$Lt=0,3862279$

время $t=2'',4.$

Симъ образомъ находимъ для 24-хъ-фунтоваго ядра; 1) уголъ возвышенія орудія $\theta=6°32'22''$ (по § 76$=6°33'7''$); 2) начальную скорость $a=472$ фут. (по § 76$=481$ фут.); 3) разстояніе $x''-x=13$ саж., на которомъ ядро упадаетъ на валгангъ отъ боковаго бруствера (по § 76$=12$ саж.); 4) уголъ паденія $\alpha''=4°55'43''$ (по § 76$=5°29'$); 5) скорость паденія на валгангѣ $v=394$ фут (по § 76$=403$ фут.); 6) время достиженія снаряда до бруствера $t=2'',4.$

§ 116 *Задача* 2 Даны разстояніе $AB=x$, высота бруствера $BC=y$, высота валганга $BR=y''$ и разстояніе точки паденія ядра $RI=x''-x$; найти уголъ бросанія$=\theta$, уголъ паденія$=\alpha''$ и начальную скорость$=a$.

Представивъ уравненія (1) и (2) въ видѣ

$$x\,tg\theta - y = \frac{g}{m^2 E^2 a^2 \cos^2\theta}\left(e^{mEx} - mEx - 1\right),$$

$$x''\,tg\theta - y'' = \frac{g}{m^2 E^2 a^2 \cos^2\theta}\left(e^{mEx''} - mEx'' - 1\right),$$

и раздѣливъ одно на другое, будемъ имѣть

$$\frac{x\,tg\theta - y}{x''\,tg\theta - y''} = \frac{e^{mEx} - mEx - 1}{e^{mEx''} - mEx'' - 1} = \lambda$$ для краткости

отсюда

$$tg\,\theta = \frac{\lambda y'' - y}{\lambda x'' - y}.$$

Послѣ сего изъ уравненія (1) получимъ начальную скорость

$$a = \frac{1}{mE\cos\theta}\sqrt{\frac{g\left(e^{mEx} - mEx - 1\right)}{x'\,tg\,\theta - y}};$$

уравненіе (4) дастъ уголъ паденія α'', скорость паденія найдется по формулѣ (h'') § 112.

Для примѣра положимъ, что орудіе поставлено на разстояніи 250 саж. или 1750 фут. и что должно бросить 24-хъ фунтовое ядро, которое бы пролетѣвъ чрезъ верхъ бруствера, возвышеннаго на 60 футъ отъ горизонта орудія, упало на валгангъ въ разстояніи на 20 саж. или 140 фут. отъ боковаго бруствера, полагая при семъ высоту валганга въ 53 фута. Здѣсь мы имѣемъ $x = 1750$ футъ, $y = 60$ футъ, $x'' - x = 140$ фут., $y'' = 53$ фут.; вставивъ сіи величины

въ предъидущія уравненія, получимъ; 1) уголъ бросанія $\theta = 5^\circ\ 37'\ 3''$ (по § 76 $= 5^\circ\ 21'\ 13''$); 2) начальную скорость $a = 733$ фут. (по § 76 $=$ 792 фута); 3) уголъ паденія $\alpha'' = 3^\circ\ 17'\ 41''$ (по § 76 $= 3^\circ\ 19'\ 7''$); 4) скорость паденія на валгангъ $v = 544$ футъ (по § 76 $= 589$ футъ); 5) время достиженія снаряда до гребня бруствера $t = 2''$, 8.

ГЛАВА III.

О разныхъ способахъ опредѣлять начальную скорость, бросаемыхъ изъ орудій снарядовъ.

§ 117. Чтобы изъ предъидущей Теоріи имѣть полезное примѣненіе къ практикѣ, то должно знать, какой зарядъ соотвѣтствуетъ извѣстной начальной скорости и обратно, какая начальная скорость соотвѣтствуетъ данному заряду. Для разрѣшенія сего важнаго въ Артиллеріи вопроса, изобрѣтены разные способы болѣе или менѣе точные, изъ коихъ здѣсь разсмотримъ употребительнѣйшіе и преимущественно соображенные съ опытами; ибо законъ, по которому дѣйствуетъ упругая жидкость при сож-

женіи пороха, но нынѣ еще не совершенно изслѣдованъ посредствомъ чистаго умозрѣнія.

1) *Опредѣленіе начальной скорости по способу Робинса.*

§ 118. Извѣстны длина канала орудія, его калибръ, вѣсъ ядра, количество пороха въ зарядѣ и упругость пороховыхъ гасовъ въ первое мгновеніе ихъ образованія; опредѣлить скорость, съ которою ядро выбрасывается изъ канала.

Робинсъ, рѣшая сію задачу принялъ за основаніе два начала; 1-е) что пороховые гасы дѣйствуютъ на ядро только до вылета его изъ жерла; 2-е) что весь порохъ въ зарядѣ сгораетъ и превращается въ упругую жидкость прежде, нежели ядро замѣтно тронется съ своего мѣста. Рѣшеніе Робинса есть геометрическое, которое Эйлеръ, для большей ясности и простоты, переложилъ на аналитическое и съ своей стороны ввелъ многія, при выстрѣлахъ обыкновенно случающіяся, и начальную скорость измѣняющія, такія обстоятельства, которыя Робинсомъ совсѣмъ выпущены были изъ виду. Пусть будетъ длина канала $AB = a$.

(фиг. 19), длина пространства порохомъ занимаемаго AC=b; при чемъ порохъ можетъ наполнять все сіе пространство или только часть онаго. Діаметръ ядра=k, удѣльный его вѣсъ въ n разъ больше удѣльнаго вѣса воды взятаго за 1-цу. Наконецъ пусть будетъ упругость пороховыхъ гасовъ въ пространствѣ AC, въ первое мгновеніе воспламененія всего заряда, въ m разъ болѣе давленія атмосферы; то по положенію Робинса какъ скоро вее пространство наполнено порохомъ, тогда будетъ m=1000; но если онъ занимаетъ только часть сего пространства, величина m должна быть тогда уменьшена соотвѣтственно сей части.

Положимъ теперь, что ядро двигаясь дошло до точки M и что CM=x; а также скорость ядра въ M равна v. По формуламъ перемѣннаго прямолинейнаго движенія, сія скорость найдется изъ дифференціальнаго уравненія (Механика Франкера, чл. 152)

$$vdv=\theta dx,$$

въ которомъ величина θ изображаетъ ускорительную силу, равную силѣ движущей ядро, дѣленной на его массу.

Дабы имѣть движущую сію силу, мы замѣ-

тимъ, что въ случаѣ, когда не принимаемъ въ разсужденіе вѣсъ ядра и другія препятствія немного измѣняющія его движеніе въ каналѣ орудія, то она измѣряется будетъ давленіемъ, которое пороховые гасы производятъ на поверхность ядра, и которое есть тоже, что и давленіе на площадь круга равнаго съ ядромъ діаметра (*). А какъ давленіе пороховыхъ гасовъ въ точкѣ M, относится къ давленію n въ точкѣ C, какъ AC: AM, или какъ b: $b+x$ (полагая, что температура пороховыхъ гасовъ пре-

(*) Въ самомъ дѣлѣ; взявъ центръ ядра за начало координатъ и ось абсциссъ x по направленію оси канала, и назвавъ давленіе пороховыхъ гасовъ на 1-цу площади чрезъ p, будемъ имѣть давленіе оныхъ на каждый елементъ $2\pi y ds$ поверхности ядра, равное $2p\pi y ds$ при чемъ нормальное или проходящее чрезъ центръ ядра. Слагающая сего давленія, по направленію параллельному оси канала, будетъ $kp\pi y ds\frac{x}{k}$; но слагающая онаго перпендикулярная къ оси канала равна нулю. Интегрируя выраженіе $\frac{kp\pi yxds}{k}$ между предѣлами $x=o$, $x=\frac{k}{2}$, и замѣчая, что $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{kdx}{2y}$, получимъ давленіе пороховой жидкости на поверхность ядра равное $\frac{p\pi k^2}{4}$, слѣдовательно тоже самое, что и давленіе оной на площадь круга, имѣющаго съ ядромъ одинаковый діаметръ.

бываетъ постоянною во время ихъ разширенія и что, такимъ образомъ, упругость оныхъ, по закону Маріотта, находится въ обратномъ отношеніи пространства или занимаемаго), то давленіе въ точкѣ M, будетъ въ $\frac{mb}{b+x}$ разъ больше давленія атмосферы. Теперь если примемъ, что давленіе атмосферы равно вѣсу водянаго столба, котораго высота равна $h=35$ фут., то сила, съ коею ядро понуждается къ движенію въ точкѣ M, будетъ равна вѣсу водянаго столба или цилиндра, равнаго съ ядромъ діаметра, а высотою $\frac{mbh}{b+x}$, то есть, равна

$$\tfrac{1}{4}\pi k^2 . \frac{mbh}{b+x};$$

здѣсь π означаетъ отношеніе окружности къ діаметру. Раздѣливъ сію величину на массу ядра, которая равна его вѣсу $\frac{1}{6}\pi k^3 n$ дѣленному на тяжесть g, равна $\frac{\pi k^3 n}{6g}$, будемъ имѣть ускорительную силу

$$\theta = \frac{\tfrac{1}{4}\pi k^2 . \frac{mbh}{b+x}}{\frac{\pi k^3 n}{6g}} = \frac{3gmbh}{2kn(b+x)}$$

въ слѣдствіе коей уравненіе $vdv = \theta dx$, приметъ видъ

$$vdv = \frac{3gmbh}{2kn} \cdot \frac{dx}{b+x}$$

отсюда, взявъ интегралъ, получимъ

$$v^2 = \frac{3gmbh}{kn} log\,(b+x) + C\,;$$

постоянная C найдется, замѣчая, что когда $x = o$ то и $v = o$, по сему будетъ

$$v^2 = \frac{3gmbh}{kn} log\left(\frac{b+x}{b}\right)$$

и

$$v = \sqrt{\frac{3gmbh}{kn} log\left(\frac{b+x}{b}\right)}.$$

Теперь если сдѣлаемъ $x = CB$, тогда будетъ $b+x = AB = a$, и найдется скорость, съ которою ядро выброшено будетъ изъ канала

$$v = \sqrt{\frac{3gmbh}{kn} log\left(\frac{a}{b}\right)} \ldots\ldots\ldots (k'').$$

§ 119. Когда зарядъ наполняетъ все пространство AC, тогда $m = 1000$, но если онъ занимаетъ только часть сего пространства равную $AD = f$, тогда вмѣсто m должно поставить $\frac{mf}{b}$; ибо давленіе въ точкѣ D, которое $= m$, от-

носится къ давленію въ точкѣ C, какъ AC: AD или $b:f$, слѣдовательно и проч. Симъ образомъ для втораго случая предъидущая формула превратился въ слѣдующую

$$v = \sqrt{\frac{3gmf}{kn} log\left(\frac{a}{b}\right)} \ldots\ldots (l'').$$

По симъ формуламъ явствуетъ, что квадраты скоростей, съ коими ядра вылетаютъ изъ орудій, находятся между собою въ прямомъ отношеніи логарифмовъ $\frac{a}{b}$ или $\frac{AB}{AC}$ и длины f того пространства, которое порохъ занимаетъ, и въ обратномъ отношеніи діаметровъ ядеръ и относительно ихъ вѣсовъ.

§ 120. Чтобъ не имѣть большаго затрудненія въ опредѣленіи надлежащей длины каждаго заряда, введемъ въ предъидущія вычисленія, вмѣсто длины заряда, отношеніе его вѣса къ вѣсу ядра, и означимъ вѣсъ пороха въ зарядѣ чрезъ P, удѣльную его тяжесть чрезъ p, вѣсъ ядра чрезъ Q, то будетъ

$$P = \tfrac{1}{4}\pi k^2 . fp; Q = \tfrac{1}{6}\pi k^3 n = \tfrac{1}{4}\pi k^2 . \tfrac{2}{3}kn;$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{2kn}{3fp}, \text{ и } f = \frac{2knP}{3pQ}.$$

Вмѣстивъ, во 2-ю формулу (l''), сію величину, и перемѣня Неперовъ логарифмъ въ обыкно-

венный, чрезъ раздѣленіе сего послѣдняго на модуль M=0,43429448, получимъ

$$v = \sqrt{\frac{2gmhP}{MQp}} L\left(\frac{a}{b}\right) \ldots\ldots\ldots (m''),$$

гдѣ члены дробнаго количества $\frac{a}{b}$, можно по произволенію выражать или въ дюймахъ, или въ калибрахъ орудія или наконецъ въ поперечникахъ ядра.

Относительно формулы (k''), для коей $f=b$, положимъ, что въ длинѣ канала a діаметръ k содержится i разъ, то есть, $\frac{a}{k}=i$, то будетъ $a=ik$; но имѣемъ величину b равную $\frac{2knP}{3pQ}$, слѣдовательно будетъ

$$\frac{a}{b}=\frac{3ipQ}{2nP},$$

и формула (k'') обратится въ

$$v = \sqrt{\frac{2ghmP}{MQp}} . L\left(\frac{3ipQ}{2nP}\right) \ldots\ldots (n''),$$

посредствомъ коей удобно найдется начальная скорость ядра, или то пространство, которое бы оно пробѣжало равномѣрнымъ движеніемъ въ одну секунду со скоростію, полученною имъ

отъ силы пороха при вылетѣ изъ жерла орудія.

§ 121. Въ предъидущемъ рѣшеніи выпущены многія обстоятельства, которыя порознь и не такъ важны, но въ совокупности могутъ произвесть значительное измѣненіе въ найденной начальной скорости.

Первое препятствіе, противополагаемое движенію ядра по длинѣ канала, есть давленіе атмосферы со стороны отверстія орудія. По предъидущему сіе давленіе равно вѣсу воднаго столба, имѣющаго въ основаніи площадь большаго круга ядра, а высоту $h=33$ фут, то есть, равно

$$\tfrac{1}{4}\pi k^2 h;$$

а какъ оно противоположно давленію упругой пороховой жидкости, равному $\frac{1}{4}\pi k^2 \cdot \frac{mfh}{b+x}$, то движущая сила ядра будетъ равна

$$\tfrac{1}{4}\pi k^2 \cdot \frac{mfh}{b+x} - \tfrac{1}{4}\pi k^2 = \tfrac{1}{4}\pi k^2 \left(\frac{mfh}{b+x} - h\right);$$

раздѣливъ ее на массу ядра $= \frac{1}{6}\pi k^3 n = \frac{1}{4}\pi k^3 \cdot \frac{2}{3} kn$, будемъ имѣть, вмѣсто прежняго дифференціальнаго уравненія (§ 118), слѣдующее

$$vdv = -\frac{3gh}{2kn}\left(mf\frac{dx}{b+x} - dx\right),$$

котораго интегралъ, при условіи $x = o$ и $v = o$, будетъ

$$v^2 = \frac{3gh}{kn}\left\{ mf.\ log\left(\frac{b+x}{b}\right) - x \right\}.$$

Сдѣлавъ же $x = CB = a - b$, получимъ скорость ядра при вылетѣ изъ канала

$$v = \sqrt{\frac{3gh}{kn}\left\{ mf.\ log\left(\frac{a}{b}\right) - (a-b) \right\}} \ldots\ldots\ldots (l''),$$

которая отъ прежней (l'') различается немного, ибо подъ корнемъ весьма малая величина $a-b$, не можетъ ощутительно перемѣнить большой величины $mf.\ log\left(\frac{a}{b}\right)$.

Второе препятствіе, противополагаемое движенію ядра, происходитъ отъ сопротивленія воздуха, котораго вліяніе на маломъ протяженіи канала, будучи почти ничтожное, по сему и безполезно было бы вводить оное въ вычисленіе.

§ 122. Кромѣ показанныхъ причинъ находятся и другія, кои уменьшаютъ скорость ядра:

1) Движеніе ядра по каналу замѣдляется треніемъ онаго о внутреннюю поверхность стѣны. Въ винтованныхъ ружьяхъ, въ стволѣ которыхъ пуля вгоняется силою, треніе дол-

жно быть довольно велико. Впрочемъ, предположивъ оное равнымъ вѣсу ядра, надлежало бы найденную ускорительную силу θ въ § 118 уменьшить единицею или подкоренную величину выраженія (k″) уменьшить количествомъ $=2g$ (a—b), которое, какъ видно, не можетъ произвесть въ начальной скорости замѣтной перемѣны; предположивъ же оное во сто разъ больше противу вѣса пули, и тогда количество $200g$ (a—b), по малости своей, можетъ быть презрѣно въ сравненіи съ подкоренною величиною. Въ большихъ орудіяхъ, по причинѣ зазора, треніе бываетъ не велико; но каково бы дѣйствіе онаго ни было, подвергнуть его строгому вычисленію едва ли возможно.

2) Въ то время, какъ ядро пробѣгаетъ длину канала, пороховые гасы вырываются не только сквозь запалъ, но также сквозь зазоръ въ орудіи, и при семъ со скоростію несравненно большею противу той, какова оными сообщается снаряду. Отъ чего остающейся части пороховыхъ гасовъ упругость ослабляется, и ядро понуждается къ движенію силою меньшею противу принятой въ предшествующихъ вычисленіяхъ. Сіе обстоятельство имѣетъ большое

вліяніе на уменьшеніе скорости снаряда, и дабы вычислить эту потерю, надлежитъ знать скорость свободной пороховой жидкости. Многія есть средства опредѣлять сію скорость или по опытамъ или по Теоріи, простирающуюся, по изслѣдованіямъ Робинса и Гютона до 700 фут. въ секунду.

3) Рѣшеніе задачи предполагаетъ, что весь порохъ въ зарядѣ воспламеняется мгновенно. Но поелику на самомъ дѣлѣ сего не бываетъ, то какъ бы кратко ни было время постепеннаго воспламененія, освобождающіеся гасы въ первыя мгновенія должны дѣйствовать съ меньшею силою, нежели какова допущена въ предъидущемъ рѣшеніи. Не возможно подчинить вычисленію сіе уменьшеніе; опредѣлить же ее, другаго нѣтъ средства, какъ только чрезъ сличеніе между собою выводовъ, найденныхъ по Теоріи и по опытамъ.

4) Поелику пороховые гасы, находящіеся у дна канала, движутся съ меньшею скоростію, нежели тѣ, кои ближе къ ядру, у котораго движеніе ихъ есть самое быстрое, то заключаемъ, что сіи гасы не вездѣ по длинѣ канала раздѣлены единообразно, но что они болѣе сжаты и плотнѣе у дна, нежели возлѣ самаго

ядра. При семъ пороховая жидкость дѣйствуетъ на ядро и его движетъ не со всею свойственною ей силою и не съ полною своею скоростію, но только съ относительною или съ избыткомъ своей скорости предъ скоростію ядра; то по двумъ симъ причинамъ начальная скорость также должна получить уменьшеніе.

5) По вычисленію вся сила пороховыхъ гасовъ въ сжатомъ состояніи, употреблена была только для движенія одного снаряда; однако же часть сей силы потребна и для сообщенія движенія упругимъ и не упругимъ частицамъ самаго пороха, котораго масса, сравнительно съ массою ядра, не должна быть оставлена безъ вниманія. И такъ введемъ въ вычисленіе кромѣ вѣса Q ядра, вѣсъ P пороха и картуза, въ который онъ всыпается, и примемъ, что пороховые гасы единообразно раздѣлены въ томъ пространствѣ, которое они занимаютъ въ цилиндрическомъ каналѣ, и что они дѣйствуютъ съ прежнею силою $= \frac{\pi}{4} k^2 \frac{mfh}{b+x}$ противъ площади круга, равнаго съ ядромъ діаметра. Въ семъ предположеніи центръ тяжести гасовъ, коихъ масса равна P, будетъ посрединѣ длины пространства ими занимаемаго; центръ тяже-

сти всей массы P + Q, которая движется въ каналѣ, найдется по извѣстному правилу; и будетъ разстояніе онаго отъ дна канала, $AN = z = \frac{Q(b+x)+P\left(\frac{b+x}{2}\right)}{Q+P} = \frac{(Q+\frac{1}{2}P)(b+x)}{Q+P}$; отсюда, бравъ дифференціалъ въ отношеніи ко времени t, получаемъ скорость v движенія сего центра, въ функціи скорости v' ядра, равную $\frac{(Q+\frac{1}{2}P)}{Q+P}v'$. Но, по основаніямъ Динамики, центръ тяжести совокупной массы, побуждаемой данными силами, движется по тому же закону, по которому двигалась бы вся сія масса, сосредоточенная въ центрѣ тяжести и подверженная дѣйствію тѣхъ же силъ, посему въ уравненіи $v'dv' = \theta dz$, опредѣляющемъ скорость центра тяжести ядра и пороховой жидкости, надлежитъ ускорительную силу θ уравнить

$$\frac{1}{4}\pi k^2 . \frac{g\ f\ m\ h}{(P+Q)\ (b+x)}$$

или, по исключеніи величины $f = \frac{P}{\frac{1}{4}\pi k^2 . p}$ (§ 120), уравнить

$$\frac{g\ m h\ P}{p\ (P+Q)\ (b+x)};$$

внося въ оное какъ сію величину, такъ и

предъидущія величины найденныя для v' и z, будемъ имѣть

$$\left(\frac{Q+\frac{1}{2}P}{Q+P}\right)^2 v\,dv = \frac{g\,m\,h\,P}{p(P+Q)\,(b+x)} \cdot \left(\frac{Q+\frac{1}{2}P}{Q+P}\right) dx,$$

или

$$v\,dv = \frac{mgh\,P}{p(Q+\frac{1}{2}P)} \cdot \frac{dx}{(b+x)};$$

потомъ взявъ интегралъ между предѣлами $x=o$ и $x=a-b$, получимъ начальную скорость ядра

$$v = \sqrt{\frac{2mgh\,P}{p(Q+\frac{1}{2}P)} \cdot log\left(\frac{a}{b}\right)}.$$

§ 123. Поелику сія формула, какъ и прежняя, выведена въ предположеніе мгновеннаго воспламененія всего заряда, постоянной температуры разширяющагося газа, и съ упущеніемъ вышеприведенныхъ главныхъ обстоятельствъ, замѣтно уменьшающихъ начальную скорость ядра, то дабы могла быть приложенною ко всѣмъ случаямъ практики, Гютонъ изъ опытовъ своихъ находитъ, что въ оной вмѣсто количества $\frac{1}{2}P$ должно взять $\frac{1}{3}P$, то есть, одну треть вѣса пороха и картуза, въ которомъ онъ заключается, и что надлежитъ сдѣлать $m=2200$ атмосфернымъ давленіямъ. Слѣдовател. исправленная формула, которую мы можемъ употребить для нахожденія начальной скорости сна-

рядовъ, будетъ вида

$$v = \sqrt{\frac{bmgh\,P}{pM(P+3Q)}} \cdot L\left(\frac{a}{b}\right) \ldots\ldots (q''),$$

или, выражая количества P и Q въ функціи отъ f и k (§ 120),

$$v = \sqrt{\frac{bmgh}{pM}} \cdot \sqrt{\frac{f}{\left(f+\frac{2kn}{p}\right)}} \cdot L\left(\frac{a}{b}\right) \ldots\ldots (r'').$$

Въ сей формулѣ предполагается каналъ и камора одинакой ширины, и количество f = длинѣ заряда, занимающаго часть сей каморы; b = отстоянію центра ядра отъ дна канала; a = длинѣ канала къ каморою. При неравной же ширинѣ канала съ каморою должно сію послѣднюю превратить въ цилиндръ, равный діаметромъ калибру орудія, и высоту сего цилиндра придать какъ къ длинѣ канала, такъ и къ отстоянію центра ядра отъ каморы, для полученія величинъ a и b: при семъ величина f найдется чрезъ уравненіе (§ 120)

$$f = \frac{4P}{\pi k^2 p}.$$

§ 124. Когда $b = f$, то будемъ имѣть

$$v = \sqrt{\frac{bmgh}{pM}} \cdot \sqrt{\frac{f}{\left(f+\frac{2kn}{p}\right)}} \, L\left(\frac{a}{f}\right) \ldots\ldots (s'').$$

Сравнивая сію скорость съ предъидущею (t'')

усматриваемъ, что ядро бывъ придвинуто ближе къ пороховому заряду, во время зарлжанія орудія, получаетъ по выстрѣлѣ большую начальную скорость. Впрочемъ по мнѣнію Робинса, если будетъ между зарядомъ и ядромъ пустое пространство достаточно большое, то пороховая жидкость, дѣйствуя тогда не только давленіемъ, но и ударомъ, увеличиваетъ начальную скорость въ высшей степени: по не имѣнію обстоятельныхъ опытовъ сіе мнѣніе остается пока сумнительнымъ.

§ 125. Представляя формулы (r″) и (s″) въ видѣ

$$v = \sqrt{\frac{bmgh}{pM}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{f}{k}}{\left(\frac{f}{k}+\frac{2n}{p}\right)} \mathrm{L}\left(\frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}\right)},$$

$$v = \sqrt{\frac{bmgh}{pM}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{f}{k}}{\left(\frac{f}{k}+\frac{2n}{p}\right)} \mathrm{L}\left(\frac{\frac{a}{k}}{\frac{f}{k}}\right)},$$

и изображая количества f, a, b числомъ поперечникомъ ядра, будемъ имѣть вмѣсто оныхъ слѣдующія

$$v = \sqrt{\frac{bmgh}{pM}} \sqrt{\frac{f}{\left(f+\frac{2n}{p}\right)} \mathrm{L}\left(\frac{a}{b}\right)}, \quad \text{и}$$

$$v = \sqrt{\frac{bmgh}{pM}} \sqrt{\frac{f}{\left(f+\frac{2n}{p}\right)} \cdot \mathrm{L}\left(\frac{a}{f}\right)},$$

или, сдѣлавъ отношеніе $\frac{2n}{p} = n'$,

$$v = \sqrt{\frac{bmgh}{pM}} \sqrt{\frac{f}{(f+n')}} \, \mathrm{L}\left(\frac{a}{b}\right) \text{ и}$$

$$v = \sqrt{\frac{bmgh}{pM}} \sqrt{\frac{f}{(f+n')}} \, \mathrm{L}\left(\frac{a}{f}\right) \ldots\ldots (t'').$$

Приложимъ послѣднее выраженіе къ опредѣленію длины f сильнѣйшаго заряда или такого, который сообщаетъ ядру самую большую начальную скорость. Очевидно, что съ прибавленіемъ пороха въ зарядѣ увеличивается скорость, только до нѣкоторой степени; ибо оставивъ малую часть канала не занятою порохомъ, ядро вылетитъ изъ орудія прежде, чѣмъ пороховая жидкость успѣетъ сообщить ему всю скорость; съ другой стороны весьма малый зарядъ оказываетъ на ядро лишь слабое дѣйствіе; посему дабы движеніе ядра, по возможности, было самое быстрое, то надлежитъ для f найти такую величину, чтобы величина v была самая большая (maximum) или чтобы дифференціалъ ея въ отношеніи къ f былъ равенъ нулю. И такъ возвысивъ выраженіе (t'') въ квадратъ и отбросивъ постоянные множители, получимъ чрезъ дифференцированіе количества $\frac{f}{f+n'}$.

$log\left(\frac{a}{f}\right)$, въ отношеніи перемѣнной f, уравненіе

$$\frac{n'}{(f+n')^2}\, log\left(\frac{a}{f}\right) - \frac{1}{f+n'} = o,$$

или

$$n' log\left(\frac{a}{f}\right) = f + n' \ldots\ldots\ldots (u''),$$

изъ котораго должна быть выведена длина f сильнѣйшаго заряда. Хотя рѣшеніе сего уравненія, при частныхъ значеніяхъ для a и n', удобно можетъ быть совершено по правилу ложнаго положенія, но чтобы имѣть общую величину f освобожденную отъ логарифма, то употребимъ для сего извѣстный рядъ

$$log\left(\frac{a}{f}\right) = 2\left\{\frac{a-f}{a+f} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{a-f}{a+f}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\right\},$$

въ которомъ безъ большой погрѣшности можно отбросить 2-й членъ и слѣдующіе и взять, $log\left(\frac{a}{f}\right) = 2\left(\frac{a-f}{a+f}\right.$. Чрезъ что предъидущее уравненіе обратится въ

$$2n'\left(\frac{a-f}{a+f}\right) = f + n'$$

или въ

$$f^2 + (a+3n')f = an';$$

отсюда найдется

$$f = -\tfrac{1}{2}(a + 3n') + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 10.an' + 9.n'^2}$$

и

$$\frac{f}{a} = -\tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{3n'}{a}\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{10n'}{a} + \frac{9n'^2}{a^2}};$$

хотя количества f и a увеличиваются вмѣстѣ, однако отношеніе $\frac{f}{a}$ постепенно становится менѣе. А изъ сего заключаемъ, что длина сильнѣйшаго заряда не имѣетъ постояннаго отношенія къ длинѣ канала орудія, и что чѣмъ будетъ больше длина канала, тѣмъ сравнительно меньшаго требуетъ заряда. Самая большая начальная скорость, соотвѣтсвующая сему заряду найдется по формулѣ (t″).

§ 126. Слѣдующая таблица, вычисленная Гютономъ, содержитъ въ себѣ сіи скорости для ядеръ, бросаемыхъ изъ разныхъ орудій при длинахъ каналовъ по порядку увеличивающихся на 2 калибра, принимая при семъ діаметръ ядра почти равнымъ сему калибру, и влагая зарядъ въ орудіе безъ картуза.

Длина канала въ калибрахъ a.	Длина сильнѣйшаго заряда въ калибрахъ f.	Частное отъ $\frac{a}{f}$.	Вѣсъ заряда въ сотыхъ доляхъ вѣса ядра.	Наибольшая начальная скорость ядра въ футахъ.
2	0,63	3,171	12	810
4	1,20	3,333	23	1122
6	1,72	3,488	33	1348
8	2,20	3,636	42	1529
10	2,64	3,788	50	1681
12	3,05	3,934	58	1815
14	3,43	4,082	65	1929
16	3,78	4,233	71	2033
18	4,11	4,380	78	2127
20	4,42	4,525	84	2213
22	4,71	4,671	90	2292
24	4,99	4,810	95	2366
26	5,25	4,952	100	2434
28	5,50	5,091	105	2498
30	5,73	5,235	109	2558
32	5,96	5,369	113	2614
34	6,17	5,510	117	2668
36	6,37	5,651	121	2719
38	6,56	5,793	125	2767
40	6,75	5,926	128	2813
42	6,93	6,061	132	2857
44	7,10	6,197	135	2899
46	7,27	6,328	138	2939
48	7,43	6,460	141	2978
50	7,58	6,596	143	3015
52	7,72	6,736	146	3051
54	7,86	6,870	149	3085
56	8,00	7,000	152	3118
58	8,13	7,134	155	3150
60	8,26	7,264	157	3181

По сей таблицѣ, если будетъ извѣстно сколько разъ калибръ орудія содержится въ длинѣ канала, и когда будетъ данъ вѣсъ ядра, найдется длина и вѣсъ сильнѣйшаго зарлда, атакже скорость симъ зарядомъ сообщенная ядру. Въ случаѣ же, когда данная длина канала заключаться будетъ между послѣдовательными какими либо двумя числами 1-го столбца, то соотвѣтствующія числа прочихъ столбцовъ удобно найдутся по простой пропорціи. Если при извѣстной длинѣ канала орудія, вмѣсто самой большой скорости, будетъ назначена какая либо другая меньшая, то соотвѣтственный зарядъ приблизительно найдется, пославъ пропорцію: квадратъ табличной скорости относится къ табличному заряду, какъ квадратъ заданной скорости относится къ искому заряду (на счетъ этого правила, смотри ниже.

§ 127. Основываясь на Теоріи Робинса находится, что при всѣхъ вообще длинахъ и калибрахъ орудій, отношеніе длины сильнѣйшаго заряда къ длинѣ всего канала есть постоянно и равно $\frac{1}{2,71828}$ почти $=\frac{7}{19}$. Въ самомъ

дѣлѣ, бравъ дифференціалъ выраженія (§ 118)

$$\sqrt{\frac{3gmk}{kn}.b\log\left(\frac{a}{b}\right)}, \text{ или } b\log\left(\frac{a}{b}\right),$$

которое относительно перемѣнной b должно быть наибольшимъ, и уравнивъ оный нулю, будемъ имѣть

$$db.\log\left(\frac{a}{b}\right)-db=o, \text{ и } \log\left(\frac{a}{b}\right)=1,$$

отсюда $\frac{a}{b}$ = числу, коего Неперовъ логариѳмъ равенъ 1-цѣ, то есть, $\frac{a}{b}=2,71828$ и $\frac{b}{a}=\frac{1}{2,71828}$. Но по опытамъ найдено, что таковаго постояннаго отношенія длины сильнѣйшаго заряда къ длинѣ канала не бываетъ, а перемѣняется оно вмѣстѣ съ длиною канала.

2) *Опредѣленіе начальной скорости изъ дальности полета снарядовъ, по способу Ломбара.*

§ 128. Для опредѣленія начальной скорости дальности полета снарядовъ, бросаемыхъ подъ небольшимъ возвышеніемъ, а также при горизонтальномъ направленіи орудія, надлежитъ знать точно уголъ, составляемый первымъ направленіемъ вылета снаряда изъ отверстія съ

осью канала; ибо при выстрѣлахъ съ малымъ возвышеніемъ, каковые обыкновенно производятся изъ пушекъ и единороговъ, малѣйшее отклоненіе снаряда, при вылетѣ его, отъ направленія оси, производитъ ощутительную перемѣну въ дальности самаго полета.

Слѣдующій способъ, выдуманный Ломбаромъ, можетъ быть съ точностію употребленъ къ опредѣленію сего отклоненія или угла вылета. Утверждаютъ въ землю вертикально два столба, одинъ P (фиг. 20-я) у платформы подъ дуломъ A орудія, а другой Q въ разстояніи 4-хъ или немного болѣе саженъ. Сему послѣднему сверхъ земли даютъ больше возвышенія, нежели первому; однако же меньше, до нѣсколькихъ дюймовъ, противъ самой нижней линіи канала при горизонтальномъ направленіи орудія, дабы выстрѣленный снарядъ, пролетая надъ онымъ, безпрепятственно перерѣзывалъ планку CB, сдѣланную изъ нехрупкаго дерева, весьма тонкую, имѣющую отъ трехъ до 4-хъ дюймовъ ширины и вставленную на верху сего столба, который при томъ долженъ быть утвержденъ такимъ образомъ, чтобы сторона планки, обращенная къ орудію, была перпен-

дикулярна къ вертикальной плоскости выстрѣ-ла. Чрезъ нивеллированіе находятъ, какимъ количествомъ дюймовъ столбъ Q выше P. Потомъ на верху столба P проводятъ черту параллельную продольной впадинѣ столба Q, и по сей чертѣ ставятъ, въ вертикальномъ положеніи, линѣйку DE, раздѣленную на футы, дюймы и линіи. Придвинувъ къ ней дуло орудія, получаютъ требуемое разстояніе его отъ планки CB, и вертикальное разстояніе нижней точки *m* жерла отъ верха столба P; отсюда также заключаютъ, на сколько сія точка *m* выше верха столба Q. Устроивъ все такимъ образомъ и наведши орудіе горизонтально на планку CB, ясно видно, что поелику на разстояніи 4-хъ саженъ, тяжесть не успѣетъ замѣтно склонить ядро въ низъ, то когда оно по выстрѣлѣ слѣдуетъ по оси канала, должно перерѣзать планку нижнюю своею округлостію въ точкѣ *i*, находящейся на равной высотѣ съ *m*. Но если, по какимъ либо причинамъ, ядро вылетитъ по направленію, которое будетъ или выше или ниже горизонтальной оси, тогда оно нижнею своею округлостію перерѣжетъ планку въ другой точкѣ *g*. Вымѣривъ высоту *gk* сей

точки отъ верха столба и сравнивъ оную съ извѣстною высотою ik, получимъ разстояніе gi и слѣдственно направленіе вылета снаряда въ отношеніи къ горизонту. Потомъ изъ треугольника gim прямоугольнаго въ точкѣ i, по извѣстнымъ сторонамъ gi и mi, найдемъ уголъ вылета m посредствомъ $tgm = \frac{gi}{mi}$. Зная сей уголъ, сверхъ того вымѣривъ чрезъ нивелированіе отстояніе перваго паденія снаряда въ l отъ орудія равное mn, и вертикальное склоненіе отъ горизонтальной линіи mn равное nl, получимъ начальную скорость снаряда по правилу § 53, опредѣляя во первыхъ, изъ треугольниковъ gim и hnm подобныхъ между собою, величину $hn = \frac{gi \times mn}{mi}$, потомъ $hl = nl + hn = y$, время $t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$ и наконецъ

$$a = \frac{e^{cx} - 1}{ct} \text{ или } a = \left(\frac{e^{cx} - 1}{c}\right)\sqrt{\frac{g}{2y}}.$$

Скорость $= a$, найдется также по формулѣ (§ 111)

$$a = \frac{1}{mE\cos\theta}\sqrt{\frac{g(e^{mEx} - mEx - 1)}{x\,tg\theta - y}},$$

въ которой $\theta = \pm < hmn$, съ $+$ при возвышенномъ направленіи вылета mg, съ $-$ при

склонительномъ направленіи сего вылета; $x = mn$; $y = -nl$; $xtg\theta = +hn$; $xtg\theta - y = nl + hn = hl$; $m = 2c = \frac{3\lambda D}{2kD'}$, (§55); $E = \frac{1}{cos\frac{1}{2}\theta} =$ почти 1-цѣ.

§ 129. Употребляя сіи формулы, мы пренебрегли склоненіе внизъ ядра тяжестію на разстояніи mg. Хотя это склоненіе почти ничтожное, но дабы увѣриться, не сдѣлаетъ ли оно ощутительной разности въ найденной нами скорости, то на основаніи единообразнаго движенія сыщемъ время, которое употребитъ снарядъ на прохожденіе пространства mg со скоростію выше выведенною $= a$, и весьма мало различающеюся отъ истинной; посредствомъ сего времени, которое назовемъ t', найдется величина склоненія внизъ снаряда $= \frac{1}{2}gt'^2$; потомъ, присоединя оную къ gi съ надлежащимъ знакомъ, будемъ имѣть для опредѣленія угла вылета уравненіе.

$$tg\theta = \frac{gi + \text{склоненіе}}{mi},$$

гдѣ знакъ + относится къ возвышенному направленію вылета, а знакъ — къ склонительному направленію. Имѣя уголъ θ легко выведемъ, по предъидущимъ формуламъ, вѣрнѣй-

шую величину начальной скорости.

§ 130. Чтобы представить примѣръ вычисленій, примемъ въ разсужденіе опыты, дѣланные во время практическихъ занятій Офицеровъ Артиллерійскаго Училища въ Красномъ селѣ въ Августѣ мѣсяцѣ 1832 года, для опредѣленія, по способу Ломбара, начальной скорости снарядовъ, бросаемыхъ изъ пушекъ и единороговъ разныхъ калибровъ при различныхъ зарядахъ.

Изъ 12-ти-фунтовой пушки, установленной совершенно горизонтально, выстрѣленное ядро зарядомъ въ 4 фунта пороха пробило планку, поставленную въ 28 футахъ и 2-хъ дюймахъ разстоянія отъ отверстія орудія, въ точкѣ g возвышенной на 1 дюймъ и 6 линій надъ горизонтальною линіею mi, и упало потомъ на землю въ разстояніи отъ орудія на 142 саж. 3 фута и ниже горизонтальной линіи mi на 4 фут. 6,875 дюйма.

Въ слѣдствіе данныхъ сихъ величинъ будемъ имѣть для второй формулы предъидущаго параграфа; x=142 саж.+3 фута=997 фут.; $-y$=4 фут.+6,875 дюйма=4,573 фут.; mi=28 фут.+2 дюйма=338 дюймовъ; gi=1,6 дюйм.;

$tg\theta = \frac{1,6'}{338} = 0,0047337$, $Ltg\theta = 7,6752007$, уголъ вылета $\theta = 16'16''$; $xtg\theta = 4,7405$ футъ; $xtg\theta - y = 9,2925$ фут.

Потомъ

$$Lm = L\left(\frac{9D}{10kD'}\right) = \overline{4},5975928 \text{ (§ 55 табл.)}$$

$$Lx = 2,9986952$$

$$L(mx) = \overline{1},5962880; \quad mx = 0,39472$$

$$LLe = \overline{1},6377843$$

$$L(mxLe) = \overline{1},2340723; \quad mxLe = 0,1714243$$

$$e^{mx} = 1,48397.$$

$e^{mx} - mx - 1 = z = 0,08925$.

$$Lz = \overline{2},9506082$$

$$Lg = 1,5080447$$

$$-L(xtg\theta - y) = -0,9681326$$

$$\overline{1},4905203; \quad Lm = \overline{4},5975928$$

$$L\sqrt{\frac{g^2}{xtg\,\theta - y}} = \overline{1},7452601; \quad Lcos\theta = 9,9999951$$

$$-Lm\ cos\ \theta = -4,5975879$$

$$\overline{4},5975879$$

$$La = \overline{3},1476722;$$

отсюда начальная скорость $a = 1405$ футъ.

§ 131. Здѣсь прилагаются таблицы исчисленныхъ начальныхъ скоростей (во время сказанныхъ занятій въ Красномъ селѣ), изъ двухъ выстрѣловъ каждымъ зарядомъ произведенныхъ,

для 12-ти фунтовой пушки, для $\frac{1}{2}$ пудоваго единорога и для 18-ти фунтовой пушки. Для орудій другихъ калибровъ опыты не были сдѣланы. Полезно было бы для практической Артиллеріи и для теоріи сей науки произвесть сего рода опыты въ значительномъ числѣ для каждаго орудія, чтобы изъ многихъ частныхъ результатовъ можно было извлечь ближайшій къ истинному.

Исчисленныя начальныя скорости.		
Для 12 фунтовой пушки.	Для $\frac{1}{2}$ пудов. единорога.	Для 18 фунт. пушки.
Зарядъ скорость 32 зол. 380 фут. 64 — 619 — 1 фун. 879 — 1½ — 1034 — 2 — 1170 — 3 — 1247 — 4 — 1430 —	Зарядъ скорость 32 зол. 300 64 — 526 1 фун. . 560 1½ — . 619 2 — . 961 2½ — . 1010 3 — . 1237 4 — . 1386	Зарядъ скорость 54 зол. . 472 1 фун. . 727 2 — . 961 3 — . 1143 4 — . 1223 5 — . 1358 6 — . 1412

§ 132. Треніе воздуха о поверхность снаряда получившаго, при вылетѣ своемъ изъ канала орудія, быстрое вращательное движеніе, можетъ сдѣлать невѣрнымъ опредѣленіе начальной скорости изъ дальности полета снарядовъ, даже

тогда, когда извѣстенъ намъ истинный уголъ вылета, и когда снарядъ будетъ сферическій и однородный, или центръ его тяжести совпадаетъ съ центромъ величины. Чтобы это видѣть, пусть будетъ G (фиг. 21) центръ тяжести и величины тѣла совершенно сферическаго и однороднаго; AGB діаметръ касательный къ кривой линіи полета. Предположимъ для большей простоты, что ось вращенія, которая должна пройти чрезъ точку G, перпендикулярна къ сему діаметру. Пусть будетъ ADBE сѣченіе тѣла перпендикулярное къ сей оси и DGE діаметръ онаго перпендикулярный къ AGB. Примемъ теперь, что точка G движется отъ A къ B или въ сторону показанною стрѣлкою S, и что вращеніе происходитъ въ сторону показанною стрѣлками въ A, D, B, E. Сіе вращательное движеніе сопровождаться будетъ треніемъ воздуха о каждый елементъ поверхности; при томъ поелику упругая жидкость получаетъ, во кругъ движущагося тѣла, различную плотность и большую на передней поверхности нежели на задней, по сему треніе, въ разныхъ точкахъ каждаго сѣченія параллельнаго ADBE, будетъ различное и больше со стороны точки

B, нежели A. Слѣдовательно, если всѣ силы происходящія отъ сего тренія перенесемъ, параллельно самимъ себѣ, въ точку G, получимъ по разложеніи оныхъ по направленію GD діаметра DGE, слагаемую силу. Назовемъ эту силу чрезъ F, вѣсъ тѣла чрезъ P, сопротивленіе средины перенесенное въ точку G и направленное по линіи GA, діаметра AGB, чрезъ R. Равнодѣйствующая трехъ силъ F, P, R, будетъ движущею силою точки G, коей ускорительная сила найдется, раздѣляя сію равнодѣйствующую на массу тѣла. Изслѣдуемъ дѣйствіе трехъ этихъ силъ на точку, при различномъ положеніи оси вращенія въ отношеніи къ горизонту.

Если примемъ, что ось вращенія вертикальная и слѣдовательно заключается въ плоскости двухъ силъ P и R, въ такомъ случаѣ сила F направлена будетъ перпендикулярно къ сей плоскости, принудитъ точку G оставить эту вертикальную плоскость, и описать двояко-кривую линію. Напротивъ того, если примемъ, что ось вращенія есть горизонтальная, сила F направлена будетъ къ вертикальной плоскости силъ P и R, сливающейся съ плоскостію сѣче-

нія ADBE; точка G не выйдетъ уже изъ сей плоскости и кривая, которую она пробѣжитъ, будетъ плоская.

§ 133. Въ послѣднемъ случаѣ видно, что составляющая вертикальная сила F увеличитъ или уменьшитъ вѣсъ P, смотря потому будетъ ли стрѣлка A направлена внизъ или вверхъ. При горизонтальномъ направленіи AB сила F будетъ вертикальная и увеличиваніе или уменьшеніе вѣса наибольшее. И такъ предположивъ, что выстрѣлъ произведенъ горизонтальный и что ядро получило вращеніе около горизонтальной оси перпендикулярной къ направленію выстрѣла, треніе воздуха о поверхность ядра увеличитъ его вѣсъ и уменьшитъ дальность паденія, когда передняя часть сего тѣла будетъ обращаться снизу вверхъ; напротивъ того треніе умельшитъ вѣсъ и увеличитъ дальность паденія, когда передняя часть обращаться будетъ съ верху въ низъ. Во второмъ семъ случаѣ, часть кривой линіи полета иногда можетъ сдѣлаться выпуклою къ поверхности земли. Для сего нужно только, чтобы вращеніе было достаточно быстрое, при коемъ бы сила F сдѣлалась бы больше вѣса P; но тогда треніе,

постепенно уменьшая скорость вращенія, наконецъ перемѣнивъ ее въ такую, при коей сила F будетъ менѣе P, и кривая линія полета сдѣлается обыкновенною вогнутою къ землѣ.

Сіи разсужденія показываютъ, что независимо отъ недостатка сферичности и однородности ядра, треніе воздуха о поверхность его, послѣдовавшее отъ вращательнаго движенія полученнаго ядромъ при вылетѣ, не только можетъ уклонить центръ ядра отъ вертикальной плоскости бросанія, но измѣнить дальность паденія. Впрочемъ должно замѣтить, что ни одно изъ сихъ дѣйствій имѣть мѣста не можетъ, когда ядро обращается около діаметра AB, по направленію котораго оно движется. Ибо тогда треніе для двухъ противоположныхъ елементовъ каждаго сѣченія поверхности, перпендикулярнаго къ оси вращенія, будетъ одинаково и противоположно; слѣдовательно всѣ силы происходящія отъ тренія, будучи перенесены въ центръ тяжести, попарно въ немъ уничтожатся и не произведутъ никакой перемѣны въ движеніи сей точки.

3) *Опредѣленіе начальной скорости по способу Маттея.*

§ 134. Машина, придуманная Маттеемъ для опредѣленія начальной скорости ружейныхъ пуль и ядеръ, составляется изъ большаго горизонтальнаго круга, служащаго основаніемъ цилиндру, сдѣланному изъ картонной бумаги, и постоянно удерживающему вертикальное положеніе. Помощію особеннаго механизма, сему цилиндру сообщаютъ единообразное вращательное движеніе около его оси, и въ то же время стрѣляютъ въ него пулею или ядромъ въ горизонтальномъ направленіи, которое бы проходило чрезъ сію ось. По причинѣ вращенія цилиндра, пуля или ядро пробиваетъ его не въ точкахъ A и B (фиг. 22) діаметра, но въ точкахъ A и D хорды; ибо въ то время какъ пуля пробѣгаетъ діаметръ AB и достигаетъ противоположной точки B, иная точка D цилиндра, обращающаяся отъ B къ C, приходитъ въ B.

Положимъ, что цилиндръ сдѣлалъ n оборотомъ во время t' секундъ, или одинъ оборотъ во время $t = \frac{t'}{n}$ секундъ, и пусть діаметръ $AB = a$,

хорда BD$=b$; сіи величины извѣстны будутъ изъ самаго опыта. Въ треугольникѣ ABD прямоугольномъ при точкѣ D, имѣемъ

$$sinA=\frac{b}{a},$$

отсюда 2A или уголъ BoD$=2.Arc\left(sin=\frac{b}{a}\right)$, и длина дуги

$$BD=a.Arc\left(sin=\frac{b}{a}\right).$$

Но по причинѣ единообразности вращенія, окружность ABCD$=\pi a$ должна относиться къ дугѣ BD, какъ время t цѣлаго оборота относится ко времени части BD сего оборота, то по сей пропорціи найдется время, въ которое пуля пробѣгаетъ пространство AB съ начальною скоростію v, равнымъ $\frac{t}{\pi}\,Arc\left(sin=\frac{b}{a}\right)$; умноживъ сіе время на скорость v, произведеніе равно будетъ пространству AB или a; слѣдовательно начальная скорость пули или ядра будетъ

$$v=\frac{\pi a}{t.Arc\left(sin=\frac{b}{a}\right)},\text{ или }v=\frac{\pi a'}{t'.Arc\left(sin=\frac{b}{a}\right)}.$$

Усовершенствованная машина Гроберта для

измѣренія начальной скорости, въ случаѣ выстрѣловъ наклонныхъ къ горизонту, состоитъ изъ двухъ бумажныхъ или тафтяныхъ параллельныхъ круговъ, принимающихъ произвольное положеніе въ отношеніи къ горизонту. Подробности касающіяся до устроенія и употребленія сей машины, можно почерпнуть изъ сочиненія, изданнаго самимъ изобрѣтателемъ.

4) *Приблизительный способъ опредѣлять начальную скорость болвъ изъ замѣченныхъ, по выстрѣлѣ, горизонтальной дальности и времени ихъ полета.*

§ 155. Начальная скорость бомбы, соотвѣтствующая данному заряду, могла бы быть опредѣлена по способу предложенному въ § 63, бросая ее вверхъ вертикально и замѣчая время восхожденія и возвращенія ея назадъ. Но таковое бросаніе сопряжено съ немаловажными трудностями и даже опасностями. Впрочемъ какъ начальная скорость бомбъ, при всѣхъ иныхъ равныхъ обстоятельствахъ, получается различною и познаніе оной очень рѣдко можетъ приносить пользу въ практикѣ, то достаточно будетъ слѣдующаго приблизительнаго

способа для опредѣленія сей скорости. Прежде наблюдаемъ время полета бомбы, брошенной извѣстнымъ зарядомъ, и вымѣриваемъ горизонтальную дальность сего полета. Потомъ поставляемъ, на мѣсто криволинейнаго движенія бомбы, два прямолинейныя движенія ея проэкцій горизонтальной и вертикальной. Въ слѣдствіе перваго относительнаго движенія, при коемъ дѣйствіе тяжести въ соображеніе не берется, но одно только сопротивленіе воздуха, находимъ, по извѣстному пространству x, описываемому проэкціею бомбы во время t, начальную ея скорость въ горизонтальномъ ея направленіи почти равную (§ 53)

$$\frac{e^{cx}-1}{ct};$$

потомъ начальную скорость по направленію бросанія или при углѣ возвышенія θ, подъ коимъ произведенъ выстрѣлъ, равную

$$\frac{e^{cx}-1}{ct\cos\theta}.$$

Въ слѣдствіе же вертикальнаго относительнаго движенія бомбы въ верхъ и въ низъ, которое совершается во время t, зависимо отъ совокупнаго дѣйствія силы тяжести и сопротивленія

воздуха, сначала ищемъ по правиламъ § 63, изъ уравненія

$$t\sqrt{gc} = \alpha + \frac{1}{\mathrm{L}e} \cdot \mathrm{L}tg(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha),$$

уголъ α; посредствомъ котораго найдется начальная скорость бомбы въ вертикальномъ направленіи $= \sqrt{\frac{g}{c}} \cdot tg\alpha$, потомъ начальная скорость по направленію бросанія, равная

$$\sqrt{\frac{g}{c}} \cdot \frac{tg\alpha}{sin\theta}.$$

Если два вывода $\frac{e^{ax}-1}{ct.cos\theta}$ и $\sqrt{\frac{g}{c}} \cdot \frac{tg\alpha}{sin\theta}$ найдутся немного различными, то должно взять средній между ими. Симъ образомъ составится таблица начальныхъ скоростей бомбъ, соотвѣтственно разнымъ зарядамъ.

5) *О балистическомъ маятникѣ.*

§ 136. Робинсъ изобрѣлъ балистическій маятникъ, и помощію его первый показалъ средство въ точности опредѣлять, начальную скорость снарядовъ, законы сопротивленія воздуха при быстромъ движеніи тѣлъ, и многія другія обстоятельства до стрѣльбы относящіяся. Но какъ онъ при опытахъ своихъ, со-

ставившихъ новую эпоху въ Артиллеріи, употреблялъ не ядра, а ружейныя пули, то въ послѣдствіи Лондонское Королевское общество поручило Доктору Гютону повторить сіи опыты и произвести оные со стволами большаго калибра, нежели каковы были въ употребленіи у самаго изобрѣтателя. Результаты первыхъ опытовъ, сдѣланныхъ Гютономъ въ Вулвичѣ 1775 года, помѣщены въ транзакціяхъ Философическихъ за 1778 годъ № III. Результаты другихъ опытовъ, сдѣланныхъ имъ въ продолженіи годовъ 1783, 1784, 1785 и 1786, переведены и изданы на Французскомъ языкѣ, съ примѣчаніями, Артиллеристомъ Виллантроа (Nouvelles expériences d'Artillerie par Huton. Paris 1802). Сей ученый переводчикъ замѣтилъ совершенное согласіе между выводами найденными Гютономъ и выводами полученными, въ меньшемъ видѣ, изъ опытовъ Робинса и Дарси; изъ чего онъ заключилъ, что безъ всякаго сомнѣнія, такого же согласія должно ожидать и отъ опытовъ, произведенныхъ въ самомъ большемъ видѣ; на самомъ дѣлѣ, это подтверждено было новыми опытами, сдѣланными Гютономъ и Грегори; первымъ въ продолже-

ній годовъ 1787, 88, 89 и 91, а вторымъ 1817 года.

§ 137. Главная цѣль опытовъ съ балистическимъ маятникомъ, клонилась, къ разрѣшенію слѣдующихъ случаевъ.

1) Сравнить скорости, сообщаемыя ядрамъ одинакими зарядами, въ орудіяхъ одинакаго вѣса и одинакаго калибра, но различной длины.

2) Сравнить скорости, сообщаемыя ядрамъ разными зарядами, въ орудіяхъ одинакаго вѣса и одинакой длины.

3) Опредѣлить наибольшую скорость, которая происходитъ, при какой либо постоянной длинѣ канала, отъ увеличиванія заряда до такой степени, каковую крѣпость стѣнъ орудія дозволяетъ.

4) Опредѣлить дѣйствіе производимое перемѣннымъ вѣсомъ орудія на скорость ядра, предполагая при семъ, что всѣ прочія обстоятельства остаются тѣ же.

5) Опредѣлить углубленіе ядеръ въ дерево и другіе предметы.

6) Сравнить дальности паденія и времена полета снарядовъ съ начальною ихъ скоростію, и отсюда вывесть дѣйствіе сопротивленія воздуха и проч.

§ 138. Большая часть предѣидущихъ предложеній зависитъ отъ познанія той скорости, съ которою ядро выбрасывается изъ отверстія орудія. Сія скорость бываетъ чрезмѣрно велика; ибо доходитъ до 1000, 2000 футовъ въ секунду.

Для опредѣленія оной, постараемся сперва привесть ее къ другой меньшей, которая бы могла быть удобно вымѣрена. Къ сему достигнемъ, предположивъ, что ядро, брошенное съ большею скоростію, ударяетъ въ большой кусокъ дерева, отъ котораго оно не отскакиваетъ, но вдавливается въ оный, и вмѣстѣ съ симъ кускомъ продолжаетъ движеніе; тогда само собою явствуетъ, что давъ ударяемому тѣлу довольно значительную массу, можно будетъ начальную скорость ядра привесть къ другой меньшей удобоизмѣряемой. Извѣстно, что въ семъ случаѣ общая скорость, съ которою движется ядро вмѣстѣ съ кускомъ дерева, относится къ скорости ядра прежде удара, какъ масса ядра относится къ совокупной массѣ ядра и куска дерева. Симъ образомъ, скорость ядра въ 1000 футовъ и болѣе, можно будетъ привести къ другой въ два или три фута

только вымѣривъ сію послѣднюю, и умноживъ ее на отношеніе соединенной массы ядра и куска дерева къ массѣ ядра, произведеніе покажетъ скорость въ мгновеніе самаго удара.

§ 139. Робинсъ придумалъ простой и остроумный способъ, для измѣренія помянутыхъ уменьшенныхъ скоростей. Вмѣсто того, чтобы оставить ударяемую массу, свободно движущеюся по направленію удара ядра, можно оную, подобно маятнику стѣнныхъ часовъ, прикрѣпить винтами къ желѣзной полосѣ (фиг. 23), привѣшенной къ горизонтальной оси вращенія. Тогда ядро, ударивъ въ предположенный нами маятникъ, приведетъ его въ движеніе, въ которомъ величина перваго размаха зависить будетъ отъ силы удара произведеннаго ядромъ; вымѣривъ сей размахъ, не трудно будетъ вычислить скорость каждой точки маятника. Въ самомъ дѣлѣ; на основаніи Динамики, когда тяжелое тѣло, въ слѣдствіе удара ему сообщеннаго, поднимается на данную высоту по дугѣ какой нибудь кривой, то скорость удара равна будетъ той, которую пріобрѣтаетъ тяжелое тѣло свободно падая съ сей высоты. Теперь, длина дуги, описанной центромъ качанія маят-

ника, также радіусъ сей дуги, извѣстны; слѣдов. найдется вертикальная высота, на которую поднимается центръ качанія. Зная сію высоту, получимъ, по извѣстнымъ законамъ движенія тяжелыхъ тѣлъ, ту скорость, которую ударъ сообщаетъ центру качанія. Посредствомъ же сей скорости, будемъ имѣть количество движенія всей массы послѣ удара, слѣдовательно и скорость ядра прежде удара, по извѣстному правилу моментовъ силъ. Изъ сего видно, что опредѣленіе скорости ядра, приводится къ измѣренію величины дуги, описываемой маятникомъ, получившимъ ударъ.

§ 140. Для вычисленій гораздо полезнѣе имѣть, на мѣсто дуги качанія, величину ея хорды. Сію хорду можно измѣрять различнымъ образомъ. Робинсъ, въ своихъ опытахъ, употреблялъ для этого ленту, которой одинъ конецъ прикрѣплялся къ нижней оконечности маятника, а другой пропускался чрезъ узенькую скважину, составляемую двумя стальными полосками подъ маятникомъ расположенными. Та часть ленты, которая, во время полуразмаха, проходила съ легкимъ треніемъ чрезъ сію скважину, опредѣляла хорду дуги качанія.

Но этотъ способъ оказался не удобнымъ, и за вѣрность онаго нельзя было ручаться; посему Гютонъ придумалъ надежнѣйшее средство, опредѣлять хорду дуги перваго полуразмаха, замѣчая слѣдъ, который напечатлѣвался желѣзнымъ остроконечіемъ PB, придѣланнымъ къ нижней точкѣ маятника, на мягкомъ составѣ наполняющимъ деревянную кругообразную выемку AB, коей центръ находился по срединѣ оси привѣса, и верхняя поверхность боковъ оной заключала масштабъ хордъ.

О центрѣ тяжести и центрѣ качанія.

§ 141. При вычисленіи скорости ядра, должно знать положеніе, какъ центра тяжести такъ, и центра качанія балистическаго маятника. Способъ, коимъ ихъ опредѣляютъ, есть слѣдующій. Центръ тяжести находятъ двумя образами: 1-й кладутъ на землю треугольную желѣзную призму AB (фиг. 24), обращенную однимъ своимъ ребромъ вверхъ; на сіе ребро накладываютъ маятникъ CD, и приводятъ его въ горизонтальное равновѣсное положеніе; послѣ того, измѣряютъ разстояніе CE, отъ средины оси C до точки E, соотвѣтствующей ребру призмы; оно и будетъ разстояніе центра тя-

тяжести до средины вращенія; 2-й кладутъ концы оси вращенія EF (фиг. 25) на подставки, и прикрѣпляютъ къ нижней точкѣ L маятника конецъ веревки, которую потомъ обводятъ около блока D, расположеннаго вверху, и на другомъ ея концѣ привѣшиваютъ тяжесть, содержащую маятникъ въ горизонтальномъ равновѣсномъ положеніи. Имѣя вѣсъ маятника, и длину его cL, отъ оси до точки прикрѣпленія веревки, найдется положеніе центра тяжести G, пославъ пропорцію: вѣсъ маятника равный P, относится къ вѣсу Q, повѣшенному на концѣ веревки, какъ разстояніе cL, отъ оси вращенія до точки прикрѣпленія веревки, относится къ разстоянію отъ той же оси до центра тяжести; которое будетъ

$$cg = \frac{Q \times cL}{P}.$$

Оба способа должны дать то же положеніе центра тяжести; посему, если найденные результаты будутъ согласны между собою, то тѣмъ болѣе можно быть увѣрену въ справедливости ихъ.

§ 142. Разстояніе центра качанія *s* до оси привѣса EF, составляетъ длину простаго малт-

ника, совершающаго свои размахи въ одно время съ балистическимъ маятникомъ. Но мы найдемъ сію длину, когда сравнимъ ее съ извѣстною длиною секуднаго маятника, и сочтемъ число размаховъ, дѣлаемыхъ балистическимъ маятникомъ по малымъ дугамъ въ данное время; потому, что длины простыхъ маятниковъ, находятся въ обратномъ отношеніи квадратовъ числа размаховъ совершаемыхъ въ одно и то же время. И такъ приведемъ балистическій маятникъ въ движеніе, сообщивъ ему небольшія качанія, кои почти одновременны; помощію секуднаго или полусекуднаго отвѣса, или помощію часовъ, которые вѣрно показываютъ секунды, минуты, сочтемъ число качаній, сдѣланныхъ балистическимъ маятникомъ въ продолженіе 1, 2, 3, 4, 10 минутъ и болѣе: означимъ чрезъ n найденное число качаній во время s секундъ, и чрезъ l длину секуднаго маятника. Поелику балистическій маятникъ почесть можно за простой, коего длина $k = sc$, то будемъ имѣть.

$$n^2 : s^2 = l : k,$$

отсюда $k = \frac{s^2 l}{n^2}$ = разстоянію отъ оси до центра качанія.

Если примемъ $s=60$ секундамъ или одной минутѣ, тогда n будетъ означать число качаній, совершаемыхъ въ одну минуту; сіе число найдется, раздѣливъ число всѣхъ качаній замѣченныхъ, на число минутъ употребленныхъ на ихъ совершеніе; и будемъ имѣть

$$k=\frac{(60)^2.l}{n^2}$$

равно разстоянію GC центра качанія до оси привѣса. Длина секуднаго маятника въ широтѣ Лондона также и Вульвича, равна $39\frac{1}{8}$ дюйма; по сему будетъ относительно сей широты

$$k=\frac{3600.39\frac{1}{8}}{n^2}=\frac{140850}{n^2} \text{ дюймамъ}$$

$$=\frac{11737,5}{n^2} \text{ футамъ;}$$

въ широтѣ же С.-Петербуга, длина секуднаго маятника$=39,1684$ дюйма $=39\frac{1}{6}$ дюйма (*).

(*) На разныхъ широтахъ земнаго шара, мѣра тяжести, слѣдственно и длина секуднаго маятника, бываютъ различны. Если l' означаетъ длину секуднаго маятника въ широтѣ подъ 45^0, l длину такого же маятника въ другоѣ какомъ либо мѣстѣ, коего широта равна ψ, то величина l найдется по формулѣ (Traité de Mécanique par Poisson, 2-e édit.)

$$l=l'(1-0,002588.\cos 2\psi),$$

въ которой $l'=0,993512$ метра$=3,259613$ фут. На примѣръ,

Вычисленіе скорости ядра.

§ 143. Выведемъ формулу для вычисленія скорости ядра изъ разсматриванія качаній балистическаго маятника.

Пусть будетъ: вѣсъ ядра $=b$; вѣсъ балистическаго маятника $=p$; разстояніе центра тяжести сего рода маятника до оси привѣса, $cg=l$ (Фиг. 26); разстояніе центра качанія онаго до той же оси, $cg=k$; разстояніе точки v, въ коей происходитъ ударъ ядра, до той же оси, $cv=i$, полагая при семъ, что ядро ударяетъ въ маятникъ въ горизонтальномъ направленіи; хорда дуги описанной остроконечіемъ гвоздя, $\mathrm{L}\,l=c$; радіусъ сей дуги, или разстояніе отъ оси до

въ широтѣ С.-Петербурга, равной 59° 56′ 31″$=\psi$, будемъ имѣть длину секуднаго маятника

$$l=0,^{\text{м}}995512\,(1-0{,}002588.\cos(119°53'2''))$$
$$=0,^{\text{м}}995512\,\{1+0{,}002588.\cos(60°6'58'')$$
$$=0,^{\text{м}}995512\times 1{,}0012895.$$

то есть,

$l=0{,}994793$ метра$=3{,}265816$ фута$=39.1658$ дюйма$=39\frac{5}{6}$ дюйма.

Также мы найдемъ дѣйствіе тяжести g на данной широтѣ, по формулѣ $g=g'\,(1-0{,}002588.\cos 2\psi)$, въ которой $g'=9{,}80557$ метра$=32{,}17109$ фута$=$дѣйствію тяжести подъ 45° широты. Здѣсь въ С.-Петербургѣ оно будетъ

$g=9{,}81821$ метра$=32{,}21257$ фута.

остроконечія, $cL = r$; скорость, съ которою ядро ударяетъ въ маятникъ, и которая предполагается общею всѣмъ частицамъ онаго, равна ρ; начальная скорость, отъ коей зависитъ величина полуразмаха маятника, равна ω; m, m', m'', и проч. массы безконечно малыхъ частицъ, составляющихъ маятникъ; ϱ, ϱ', ϱ'', и проч. соотвѣтственныя разстоянія сихъ частицъ до оси вращенія; μ, μ', μ'', и проч. массы безконечно малыхъ частицъ ядра; λ, λ', λ'', и проч. соотвѣтственныя разстоянія направленій скоростей ихъ до оси привѣса, прежде удара; ε, ε', ε'', и проч. соотвѣтственныя разстоянія сихъ же частицъ до оси привѣса, послѣ удара; наконецъ дѣйствіе тяжести $= g$.

Предположивъ, что ударъ ядра сообщенъ маятнику мгновенно, тогда, по началу Динамики, предложенному Даламбертомъ (Механ. Франкера, чл. 229), будетъ слѣдовать, что впечатлѣнныя количества движенія и тѣ, кои соотвѣтствуютъ дѣйствительнымъ скоростямъ въ противную сторону взятымъ, должны составить, въ сіе мгновеніе, равновѣсіе около неподвижной оси вращенія; такъ что сумма моментовъ всѣхъ этихъ силъ, въ отношеніи сей

оси, будетъ равна нулю, то есть (Механика Франкера. чл. 244),

$$\mu\lambda v + \mu'\lambda' v + \mu''\lambda'' v + \ldots - \mu\varepsilon^2\omega - \mu'\varepsilon'^2\omega - \mu''\varepsilon''^2\omega - \ldots$$
$$\ldots - m\varrho^2\omega - m'\varrho'^2\omega - m''\varrho''^2\omega - \ldots = o,$$

или

$$v\int\mu\lambda - \omega\int\mu\varepsilon^2 - \omega\int m\varrho^2 = o,$$

здѣсь $\int$, есть знакъ интеграла.

Но моментъ инерціи маятника, или $\int m\varrho^2 = \frac{pkl}{g}$ равенъ массѣ его, помноженной сряду на разстояніе центра качанія и на разстояніе центра тяжести до оси вращенія (Мех. Франкера, чл. 252); также моментъ инерціи ядра, или $\int\mu\varepsilon^2 = \frac{b'k'i}{g}$, означая чрезъ k', разстояніе центра качанія ядра до оси вращенія; сверхъ того, по Теоріи центра тяжести, имѣемъ $\int\mu\lambda = \frac{bi}{g}$; то поставивъ сіи величины въ предъидущее уравненіе, получимъ

$$bvi - bik'\omega - pkl\omega = o,$$

отсюда угловая скорость

$$\omega = \frac{bvi}{pkl + bk'i}.$$

§ 144. Послѣ удара, ядро присоединяется къ маятнику и перемѣняетъ положеніе его центра

качанія. А какъ разстояніе центра качанія системы тѣлъ до оси вращенія, равно суммѣ моментовъ инерцій сихъ тѣлъ, дѣленной на сумму ихъ моментовъ, лишь бы только центръ тяжести каждаго тѣла находился въ той же вертикальной плоскости, проходящей чрезъ ось; то означивъ чрезъ z, разстояніе *си* новаго центра качанія до оси вращенія, будемъ имѣть

$$z = \frac{pkl + bk'i}{pl + bi};$$

слѣдовательно скорость сего центра качанія будетъ

$$z\omega = \frac{lvi}{pl + bi}.$$

Теперь подобные треугольники CLl и CUu даютъ,

$$CL : CU = Ll : Uu$$

или

$$v : z = c : Uu = \frac{cz}{r},$$ равно хордѣ дуги, описанной новымъ центромъ качанія; сверхъ того, по свойству круга, имѣемъ

$$2CU : Uu = Uu : ZU$$

или

$$2z : \frac{cz}{r} = \frac{cz}{r} : ZU = \frac{c^2 z}{2r^2} =$$ обращенному синусу сей дуги, сдѣлавъ его равнымъ h,

и поставивъ на мѣсто z выше найденную величину, получимъ

$$h = \frac{c^2}{2r^2}\left(\frac{pkl + bk'i}{pl + bi}\right).$$

Но скорость, съ которою центръ качанія u отходитъ отъ вертикальнаго своего положенія, и поднимается по дугѣ круга на высоту, равную обращенному синусу h сей дуги, равна той скорости, которую бы тяжелое тѣло пріобрѣло, свободно падая съ этой высоты, то есть, равна $\sqrt{2gh}$; посему, другое выраженіе скорости новаго центра качанія будетъ

$$\sqrt{2gh} = \frac{c}{r}\sqrt{g\left(\frac{pkl + bk'i}{pl + bi}\right)}.$$

Сравнивъ оное съ прежнимъ, составится уравненіе

$$\frac{biv}{pl + bi} = \frac{c\sqrt{g}}{r}\sqrt{\frac{pkl + bk'i}{pl + bi}},$$

изъ коего найдется

$$v = \frac{c\sqrt{g}}{bir}\sqrt{(pkl + bk'i)(pl + bi)} \ldots\ldots (1),$$

равно скорости, съ которою ядро ударяетъ въ маятникъ.

§ 145. Вмѣсто величины k', заключающейся въ семъ выраженіи, можно безъ ощутительной

погрѣшности, поставить i, ибо центръ качанія ядра, коего измѣреніе очень мало, почти совпадаетъ съ центромъ тяжести. Но Гюгонъ ввелъ въ сію формулу другія сокращенія, кои, не лишая оную требуемой точности, содѣлываютъ ее удобною для практики.

Для сего, развернувъ скобки подкоренной величины и разложивъ корень по степенямъ отъ b, будемъ имѣть сначала,

$$\sqrt{(plk+bk'i)(pl+bi)}=\sqrt{p^2l^2k+plbki+plbk'i+b^2k'i^2}$$

$$=pl\sqrt{k}\sqrt{1+\frac{bi(k+k'}{plk}+\frac{b^2k'i^2}{p^2l^2k}};$$

а какъ величина b, въ сравненіи съ p, почти ничтожна, при семъ величины I, k немного чѣмъ различаются отъ i и k', то дробь $\frac{b^2k'i^2}{p^2l^2k}$ крайне малую можно отбросить, и удержать выраженіе

$$pl\sqrt{k}\sqrt{1+\frac{bi(k+k')}{plk}},$$

которое по формулѣ Нютона Биноміи, будучи разложено въ строку, дастъ

$$pl\sqrt{k}\sqrt{1+\frac{bi[k+k']}{plk}}=pl\sqrt{k}\left\{1+\frac{bi[k+k']}{2plk}-\frac{1}{8}\frac{b^2i^2[k+k']^2}{p^2l^2k^2}\ldots\right\};$$

Но здѣсь, по той же прчинѣ, членъ $\frac{b^2i^2(k+k')^2}{8p^2l^2k^2}$

и слѣдующіе за нимъ, можно отбросить и взять

$$pl\sqrt{k}\left\{1+\frac{bi(k+k')}{2plk}\right\}=\left\{pl+\frac{bi(k+k')}{2k}\right\}\sqrt{k},$$

что въ обыкновенныхъ практическихъ случаяхъ, подходитъ къ истинной величинѣ выраженія $\sqrt{(plk+bi^2)(pl+bi)}$ ближе чѣмъ на $\frac{1}{100000}$(*).

Но при опытахъ Гютона величина $\frac{bi(k+k')}{2k}$ обыкновенно составляла $\frac{1}{500}$ или $\frac{1}{800}$ часть произведенія pl; при семъ разность, между

(*) Когда аналитическому выраженію, назначаемому для практическаго употребленія, предполагается дать видъ простѣйшій, чрезъ отбрасываніе у него членовъ или чрезъ посредство инаго какого либо пріема, измѣняющаго истинную величину онаго, то должно всегда имѣть въ виду, сколь значущи бываютъ пренебрегаемыя количества и на сколько сокращенное выраженіе отдалилось отъ истиннаго. Въ настоящемъ случаѣ, чтобы судить о степени приближенія, мы возмемъ данныя изъ опытовъ Гютона, который нашелъ, по извѣстнымъ величинамъ b, p, i, k, l, k', что количество $\frac{bi(k+k')}{2k}$ обыкновенно составляло $\frac{5}{500}$ или $\frac{1}{600}$ или $\frac{1}{800}$ часть количества pl, и что bi различалось отъ $\frac{bi(k+k')}{2k}$ не болѣе какъ на $\frac{1}{100}$ послѣдняго, или на $\frac{1}{50000}$ часть количества pl. По сему сдѣлавъ для перваго самаго невыгоднаго случая

$$\frac{bi(k+k')}{2k}=\frac{pl}{500}.$$

$\frac{bi(k+k')}{2k}$ и bi, не превосходила $\frac{1}{50000}$ часть того же произведенія pl; такъ что, величина $pl+bi$ различалась отъ $pl+\frac{bi(k+k')}{2k}$ количествомъ не превышающимъ $\frac{p_1}{50000}$ (*).

По сему, будемъ имѣть почти

$$v=\frac{c'(pl+bi)}{bix}\sqrt{\frac{g}{k}}:$$

и

$$\frac{bi(k+k')}{2k}-bi=\frac{pl}{50000}$$

найдется

$$\frac{bi(k+k')}{2plk}=\frac{1}{500}, \text{ и } \frac{bi}{pl}=\frac{99}{50000};$$

слѣдовательно количества $\frac{b^2i^2k'}{pl.k}$ или $\frac{b^2i^2}{p^2l^2}.\frac{k'}{k}$, $\frac{1}{8}\frac{b^2i^2(k+k')^2}{p^2l^2k^2}$,

и проч. сдѣлаются такъ малыми, что безъ малѣйшаго опасенія можно ихъ откинуть.

(*) Въ самомъ дѣлѣ, поскику

$$\frac{Bi(k+k')}{2k}=\frac{pl}{500}; \quad \frac{Bi(k+k')}{2k}-bi=\frac{pl}{50000};$$

отсюда получимъ

$$Bi=\frac{Bi(k+k')}{2k}-\frac{pl}{50000}=\frac{pl}{500}-\frac{pl}{50000}=\frac{99.pl}{50000};$$

$$pl+\frac{Bi(k+k')}{2k}=\frac{501.pl}{500}=\frac{50100\,pl}{50000}$$

$$pl+Bi=\frac{50099.pl}{50000};$$

и разность между послѣдними величинами равную $\frac{pl}{50000}$.

теперь поставивъ l, на мѣсто i, въ послѣднемъ членѣ выраженія $pl+bi$, получимъ формулу

$$v = \frac{cl(p+b)}{bir}\sqrt{gk} \ldots\ldots (2),$$

годную къ употребленію во всѣхъ случаяхъ, и различающуюся отъ истинной лишь только на $\frac{1}{5000}$ долю; такъ что, при самыхъ наибольшихъ скоростяхъ, погрѣшность не болѣе будетъ одного полуфута. Замѣтимъ, что величины c, l, i, r могутъ быть выражены въ такихъ мѣрахъ, какъ заблагоразсудится, въ футахъ, или дюймахъ, и проч. но величина k должна быть выражена въ футахъ, поелику формула приспособлена къ футамъ (*).

(*) Въ уравненіи $v = \sqrt{g} \cdot \frac{lc(p+b)}{bir}\sqrt{k}$, равно какъ и во всякомъ другомъ, всѣ количества, одинакаго рода, должны быть отнесены къ общей ихъ мѣрѣ, слѣдовательно выражая количество $\sqrt{g}$ въ футахъ, какъ-то обыкновенно и дѣлается, всѣ слѣдующія l, c, i, r и k должны также выражены быть въ футахъ. Однако давъ формулѣ видъ

$$v = \frac{(p+b)}{b} \cdot \frac{lc}{ir}\sqrt{gk},$$

ясно видно, что, безъ различія, тоже самое произойдетъ, въ какихъ бы мѣрахъ изображены ни были величины l, c, i, r, могущія почесться за отвлеченныя числа, лишь-бы только всѣмъ имъ назначена была одинаковая мѣра, или футы, или

§ 146. Поелику въ продолженіе производимыхъ опытовъ, съ прибавленіемъ ядра къ маятнику, перемѣняются его вѣсъ и разстоянія центра тяжести и центра качанія до оси привѣса, то въ выраженіи (2) скорости надобно, послѣ каждаго выстрѣла, перемѣнить величины p, l и k. Для каждаго слѣдующаго выстрѣла, надлежитъ величину p перемѣнить въ $p+b$; то есть, прибавить къ оной величину b. Также для каждаго слѣдующаго выстрѣла, надлежитъ величину l перемѣнить въ $\frac{pl+bi}{p+b} = l + \frac{b(i-l)}{p+b}$, что почти $= l + \frac{(i-l)b}{p}$; то есть, прибавить къ оной величину $\frac{(i-l)}{p}b$. Наконецъ, для каждаго новаго выстрѣла, надлежитъ величину k пере-

---

дюймы, и проч., но величина k непремѣнно должна быть выражена въ футахъ. Если сдѣлаемъ $\sqrt{k} = a$, такъ что формула обратится въ

$$v = \frac{(p+b)}{b} \cdot \frac{lca\sqrt{g}}{ir},$$

тогда отъ воли всякаго зависить будетъ, чтобы выразить одно которое нибудь изъ трехъ количествъ l, c и a, въ футахъ, а двѣ другія въ такихъ мѣрахъ, какія назначаются для i и r.

мѣнить въ $\frac{plk+bi^2}{pl+bi} = k + \frac{(i-k)bi}{pl+bi}$, что почти $= k + \frac{(i-k)b}{p}$; то есть, прибавить къ оной величину $\frac{(i-k)b}{p}$. Симъ образомъ, три поправки, относительно величинъ p, l и k, производятся, прибавляя послѣ каждаго выстрѣла.

b къ величинѣ p,

$\frac{(i-l)}{p}\,b$ къ величинѣ l,

$\frac{(i-k)}{p}\,b$ къ величинѣ k;

замѣчая при семъ, что величина b очень мала въ сравненіи съ p.

§ 147. Мы нашли, въ § 142, разстояніе k центра качанія въ функціи числа n качаній малтника; а именно, $k = \left(\frac{60}{n}\right)^2 q$ фут, поставивъ сію величину, вмѣсто $\sqrt{k}$, въ уравненіи $v = \frac{lc(p+b)}{bir}\sqrt{gk}$, оно сдѣлается

$$v = \frac{60\,lc(p+b)\sqrt{gq}}{birn} \quad \ldots\ldots(3).$$

Помощію простой сей формулы удобно найдется скорость ядра въ футахъ, выражая ко-

личества въ ней содержащіяся c, l, i, и r, или въ футахъ, или въ дюймахъ, или во всякой иной мѣрѣ, которая должна быть одна и та же для всѣхъ сихъ количествъ.

При семъ, вмѣсто поправки найденной въ предъидущемъ параграфѣ для величины k, нужно имѣть сообразную поправку для n. Изъ уравненія $k = \frac{60.q^2}{n^2}$ фут. получаемъ

$$n = \frac{60\sqrt{q}}{\sqrt{k}};$$

но величина k, при каждомъ слѣдующемъ выстрѣлѣ, обращается въ $k + \left(\frac{i-k}{pl+bi}\right)bi$; по сему величина n, соотвѣтственно обратится въ

$$\frac{60\sqrt{q}}{\sqrt{k + \frac{(i-k)bi}{pl+bi}}},$$

и разность между двумя послѣдовательными ея состояніями, будетъ

$$\frac{60\sqrt{q}}{\sqrt{k}} - \frac{60\sqrt{q}}{\sqrt{k + \frac{(i-k)bi}{pl+bi}}} = \frac{60\sqrt{q}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{60.\sqrt{q}}{\sqrt{k}\sqrt{1 + \frac{(i-k)bi}{(pl+bi)k}}}$$

или,

$$n - \frac{n}{\sqrt{1 + \frac{(i-k)bi}{(pl+bi)k}}}.$$

Разложивъ корень изъ двучленнаго количества въ строку, равную

$$1 + \frac{(i-k)bi}{2(pl+bi,k} - \frac{(i-k)^2 b^2 i^2}{8(pl+bi)k^2} + \ldots\ldots,$$

видно, что 3-й, 4-й и прочіе члены сего ряда, по своей малости, могутъ быть отброшены; и будемъ имѣть, вмѣсто предъидущей величины, почти равную ей

$$n - \frac{n}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{i-k}{pl+bi}\right)\frac{bi}{k}} = \frac{nbi(i-k)}{2pkl + bi(i+k)}$$

$$= \frac{nbi\left(i - \frac{bo^2 q}{n^2}\right)}{\frac{2.bo^2 plq}{n^2} + bi\left(1 + \frac{bo^2 q}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{nbi\,(in^2 - bo^2 q)}{2.bo^2.plq + bi(in^2 + bo^2.q)},$$ по поставленіи, на мѣсто k, равной величины. Поправка сія, каждый разъ, должна вычитаться изъ предшествующей величины n. Въ самомъ дѣлѣ; съ удаленіемъ центра качанія отъ оси, число n качаній совершаемыхъ въ опредѣленное время,

уменьшается; но здѣсь k увеличивается количествомъ $\frac{(i-k)bi}{pl+bi}$, слѣдовательно n должно уменьшиться количествомъ

$$6o^2.q\left\{\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+\left(\frac{i-k}{pl+bi}\right)bi}}\right\},$$

равнымъ почти

$$\frac{bin(in^2-6o^2.q)}{2.6o^2plq+bi(in^2+6o^2q)}.$$

Поправки, касающіяся до p и l остаются таковыми, какія показаны въ § 146, и объ суть придаточны.

§ 148. Теперь изслѣдуемъ три или четыре обстоятельства, причиняющія, по видимому, нѣкоторую погрѣшность въ скорости вычисляемой по формулѣ (3): онѣ суть; 1) треніе концовъ оси вращенія о поверхность гнездъ, въ которыя онѣ вставливаются; 2) сопротивленіе, противуполагаемое воздухомъ движенію маятника; 3) время, употребляемое ядромъ для углубленія своего въ дерево; и 4) сопротивленіе, противополагаемое воздухомъ полету ядра, отъ орудія къ маятнику.

Касательно 1-ю, какъ-то, тренія концовъ оси

вращенія; замѣтимъ, что дѣйствіе онаго никогда не можетъ быть столь велико, чтобы могло имѣть надлежащую цѣну въ производимыхъ опытахъ. Въ самомъ дѣлѣ: часть тренія, которое, при всемъ тщаніи, не можетъ быть совершенно изстреблено, не имѣетъ почти никакого вліянія на измѣненіе скорости; ибо когда съ одной стороны, дѣйствіемъ онаго, замѣдляется движеніе маятника, или уменьшается хорда *c* дуги качанія, то съ другой стороны уменьшается число *n* размаховъ въ одну минуту; при семъ оба уменьшенія, зависящія отъ одной и той же причины, почти равны между собою; а какъ количество *c* есть множащее въ формулѣ, *n* дѣлящее, посему треніе въ первомъ случаѣ уменьшаетъ скорость, а во второмъ случаѣ увеличиваетъ, или иначе сказать, дѣйствуетъ противуположно въ двухъ случаяхъ; слѣдовательно, погрѣшность выведенной формулы, почти совсѣмъ приводится въ ничтожность.

§ 149. Другая причина погрѣшности происходитъ отъ сопротивленія, причиняемаго воздухомъ движенію маятника. Сіе сопротивленіе препятствуетъ маятнику описать дугу надле-

жащей величины, такъ что, сія дуга и соотвѣтствующая хорда *c*, будутъ менѣе противу должныхъ. Слѣдовательно скорость ядра вычисленная по сей хордѣ, должна вытти меньшею противу той, съ которою ядро поражаетъ маятникъ; но поелику вѣсъ маятника постоянно бываетъ очень великъ, а движеніе его весьма тихое, посему сопротивленіе, противупоставляемое оному воздухомъ, должно быть крайне мало. Впрочемъ, дѣйствіе небольшаго его сопротивленія, уравнивается также, подобно дѣйствію разсматриваемаго впредь симъ тренія; ибо оно не только уменьшаетъ хорду *c* дуги качанія, но въ то же время уменьшаетъ и числю *n* размаховъ. Гютонъ чрезъ вычисленіе находитъ, что отъ вліянія сопротивленія воздуха, умаляется хорда дуги качанія на $\frac{1}{4000}$ долю, всей своей длины; посему, въ случаѣ скорости ядра въ 2000 футовъ, погрѣшность не превышаетъ одного полуфута.

§ 150. Третья причина погрѣшности составленной формулы, заключается во времени, которое потребно ядру на сообщеніе своего движенія маятнику. Мы приняли за основаніе, что

сіе впечатлѣніе производится въ одно мгновеніе; чего нельзя никакъ допустить въ точности. Оно продолжается вовсе то время, которое потребно ядру для углубленія своего въ дерево. Сіе время едва ли простирается до $\frac{1}{500}$ секунды; посему можетъ быть вовсе оставлено.

Вычисленія Гютона показали, что ядро, брошенное со скоростію равною 1500 фут. въ секунду, проникнувъ на 14 дюймовъ внутрь вязоваго дерева хорошо высушеннаго и плотнаго, употребило для всего своего углубленія $\frac{1}{643}$ часть секунды. Также, что скорость сообщенная ядромъ маятнику остается та же, до какой бы глубины оно ни вдавалось въ дерево, и ни чѣмъ не разнится отъ скорости, которую бы маятникъ получилъ, если бы ядро со всѣмъ не вдавливалось въ оный; такъ, что скорость пребываетъ постолнною, будетъ ли она мгновенно сообщена, или въ нѣкоторый весьма малый промежутокъ времени. Изъ всего здѣзь сказаннаго заключаемъ, что треніе на оконечностяхъ оси вращенія, сопротивленіе противуполагаемое воздухомъ качанію маятни-

ка, и время углубленія ядра, суть такія обстоятельства, которыя могутъ быть, не подвергаясь опутительной погрѣшности, упущены изъ виду; и тогда формула (3) дастъ истинную скорость, съ которою ядро ударяетъ въ маятникъ.

§ 151. Скорость, съ которою ядро попадаетъ въ маятникъ, не есть та самая, съ которою оно вылетаетъ изъ жерла орудія. Сія послѣдняя должна быть болѣе первой, по причинѣ сопротивленія, противуполагаемаго воздухомъ летящему ядру изъ отверстія орудія къ маятнику. Хотя бы этотъ путь былъ очень малъ, и упругая пороховая жидкость не переставала преслѣдовать и понуждать ядро внѣ жерла орудія до нѣкотораго разстоянія, и симъ самимъ противоборствовать сопротивленію воздуха, однако не безполезно будетъ изслѣдовать дѣйствіе сего сопротивленія. Вѣроятно, что оно причинитъ разность между скоростію ядра, вычисленною изъ качаній маятника, и между скоростію сего ядра, вычисленною изъ качаній орудія; эта разность доставитъ намъ средство вычислить сопротивленіе воздуха, въ особенности, когда орудіе поставлено будетъ

на значительномъ разстояніи отъ маятника. Качаніе пушки опредѣлитъ начальную скорость или ту скорость, съ которою ядро выбрасывается изъ канала; а качаніе маятника покажетъ скорость, съ которою ядро достигаетъ къ нему.

Вычисленіе скорости ядра изъ отдачи пушки.

§ 152 Скорость ядра находится другимъ образомъ, замѣчая изъ опытовъ, величину дуги, описываемой подобно маятнику стѣнныхъ часовъ. Присоединяя къ пушкѣ разныя гири, можно будетъ качанія ея привесть къ дугамъ удобоизмѣряемымъ; на основаніи, что дѣйствіе и противодѣйствіе всегда равны и прямопротивны, величина сихъ дугъ должна зависить отъ скорости ядра, или отъ силы воспламененнаго пороха; посему скорость ядра, въ разсужденіи скорости центра качанія пушки, будетъ находиться въ такомъ точно отношеніи, какъ вѣсъ пушки къ вѣсу ядра. Вычисливъ скорость центра качанія, посредствомъ хорды дуги описанной отдачею пушки, мы найдемъ скорость ядра по пропорціи: вѣсъ ядра относится къ вѣсу пушки, какъ скорость пушки къ скорости ядра; полагая при этомъ, что вѣсъ

пороха не имѣетъ никакого вліянія на отдачу.

Подобно тому, какъ въ балистическомъ маятникѣ, подъ орудіемъ и на нижней его поверхности устроиваются части, которыя бы служили къ точнѣйшему опредѣленію хорды дуги, описываемой отдачею орудія по выстрѣлѣ.

§ 453. Многіе сочинители утверждаютъ, что избытокъ отдачи пушки, по выстрѣлѣ съ ядромъ предъ отдачею оной, по выстрѣлѣ безъ ядра, совершенно соотвѣтствуетъ количеству движенія, пріобрѣтаемому ядромъ, и сопротивленію имъ противопоставляемому, или что напряженіе пороховыхъ гасовъ въ разсужденіи отдачи орудія, зависитъ отъ ихъ упругости, которая пребываетъ постоянною, будетъ ли орудіе заряжено съ ядромъ или безъ ядра. Они основываютъ мнѣніе свое на многихъ опытахъ. Допустивъ, что опыты ихъ произведены были съ крайнею точностію, и что заключенія выведенныя изъ оныхъ справедливы; однако, какъ испытанія сдѣланы были съ малыми снарядами и при малыхъ зарядахъ пороха, то можно еще сомнѣваться о постоянствѣ заключенія ими выведен-

наго, пока не подтвердятъ сего опыты съ большими ядрами и съ сильными зарядами пороха произведенные. Конечно, изъ сравненія скорости ядра, вычисленной посему положенію, со скоростію вычисленною изъ качаній маятника, законъ сей долженъ быть обнаруженъ; ибо когда онъ имѣетъ мѣсто, то скорость ядра, выведенная изъ качаній орудія, превышать будетъ скорость, вычисленную изъ качаній маятника, тѣмъ количествомъ, которое принадлежитъ къ потерѣ скорости, причиненной сопротивленіемъ воздуха летящему ядру отъ отверстія орудія къ маятнику.

§ 154. Примемъ за доказанное, что дѣйствіе заряда, на отдачу орудія, зависитъ отъ упругости воспламененнаго пороха, которая пребываетъ постоянною, будетъ ли зарядъ безъ ядра или съ ядромъ, и сыщемъ формулу для вычисленія скорости ядра изъ замѣченной отдачи пушки. Изъ начала нами принятаго слѣдуетъ, что когда, при постоянномъ зарядѣ, возмемъ хорду дуги отдачи, по выстрѣлѣ безъ ядра, и хорду дуги отдачи по выстрѣлѣ съ ядромъ, потомъ изъ послѣдней вычтемъ первую, то разность будетъ хордою соотвѣтствующею ко-

личеству движенія пріобрѣтаемому ядромъ. Справедливость сего заключенія состоитъ въ извѣстномъ свойствѣ круга, что скорости, съ которыми тѣла восходятъ, описывая разныя дуги того же круга, пропорціональны хордамъ сихъ дугъ. Въ самомъ дѣлѣ, скорость v, съ которою тяжелое тѣло B (Фиг. 27), отходитъ отъ вертикальнаго своего положенія AB, и поднимается на высоту BP по круговой дугѣ BM, равна $\sqrt{2g.PB}$; также скорость v', съ которою оно поднимается на высоту BP′ по круговой дугѣ BM′, равна $\sqrt{2g.P'B}$: отсюда получаемъ

$$v : v' = \sqrt{2g \,.\, BP} : \sqrt{2g} : BP' = \sqrt{BP : BP'},$$

но $BP : BP' = \overline{BM^2} : \overline{BM'^2}$

и $\sqrt{BP} : \sqrt{BP'} = BM : BM'$,

и такъ сказанное предложеніе само собою явствуетъ.

Пусть хорда $BM = c$ и хорда $BM' = c'$; изъ пропорціи $v : v' = c : c'$, получимъ слѣдующую

$$v - v' : c - c' = v : c,$$

которая показываетъ, что разность хордъ имѣя, къ разности соотвѣтственныхъ имъ начальныхъ скоростей качанія маятника, такое же отношеніе, *какое имѣетъ всякая хорда съ соотвѣтственною ей начальною скоростію качанія*,

дѣйствительно относится къ предположенному нами количеству движенія ядра.

§ 155. И такъ, пусть количество c представляетъ разность сихъ двухъ хордъ; то есть:

$c =$ хордѣ, отъ которой зависитъ скорость ядра;

$P =$ совокупному вѣсу пушечнаго ствола, желѣзной полосы и другихъ частей, совершающихъ вмѣстѣ съ стволомъ, качанія около оси привѣса;

$b =$ вѣсу ядра;

$l =$ разстоянію центра тяжести системы P, до оси вращенія;

$k =$ разстоянію центра качанія оной до той же оси;

$n =$ числу размаховъ, совершаемыхъ въ одну минуту;

$i =$ разстоянію отъ оси пушки до оси вращенія;

$r =$ радіусу дуги, коей хорда равна c;

$v =$ скорости ядра;

$\gamma =$ начальной угловой скорости качанія системы P, и составляющей разность между угловою скоростію отдачи по выстрѣлѣ съ ядромъ; и угловою скоростію отдачи,

по выстрѣлѣ безъ ядра;

m, m', m'',.... массы безконечно малыхъ частицъ сей системы;

ϱ, ϱ', ϱ'',.... соотвѣтственныя разстоянія ихъ до оси привѣса;

По симъ даннымъ и по извѣстному началу Динамики, предложенному Даламбертомъ, взявъ сумму моментовъ количествъ движенія системы P и ядра, съ приличнымъ ихъ знакомъ, въ отношеніи оси привѣса, и уравнивъ оную нулю, будемъ имѣть

$$\frac{bki}{g}\gamma\int m\varrho^2 = o$$

или

$$bi\nu = \gamma Plk, \text{ ибо } \int m\varrho^2 = \frac{Plk}{g};$$

отсюда

$$\gamma = \frac{bi\nu}{Plk}, \text{ и } \nu = \frac{\gamma Plk}{bi};$$

симъ образомъ, чтобы найти скорость ядра, должно знать угловую скорость γ. Умножая угловую скорость на разстояніе отъ центра качанія до оси привѣса, найдется дѣйствительная скорость сего центра, которая будетъ

$$k\gamma = \frac{bi\nu}{Pl}.$$

Далѣе, по способу изложенному въ § 144, изъ пропорціи $r : k = c : \frac{ck}{r}$, будемъ имѣть $\frac{ck}{r} =$ хордѣ дуги описанной центромъ качанія; а изъ пропорціи $2k : \frac{ck}{r} = \frac{ck}{r} : \frac{c^2k}{2r^2}$, получимъ $\frac{c^2k}{2r^2} =$ обращенному синулу h сей дуги. Но скорость, съ которою центръ качанія отдаляется отъ вертикальнаго своего положенія, и поднимается по дугѣ круга на высоту h, равна той скорости, которую бы *тяжелое тѣло пріобрѣло*, свободно, падая съ сей высоты; то есть, равна $\sqrt{2gh}$; и такъ другое выраженіе скорости центра качанія, выводимое изъ хорды c перваго полуразмаха, будетъ

$$\sqrt{2gh} = \frac{c}{r}\sqrt{gk},$$

сравнивъ оное съ прежнимъ, получимъ уравненіе

$$\frac{bip}{Pl} = \frac{c}{r}\sqrt{gk},$$

изъ котораго найдется

$$p = \frac{Plc}{bir}\sqrt{gk} \ldots\ldots (4):$$

такова есть формула *для опредѣленія скорости*

ядра, выраженная въ функціи разстоянія центра качанія и другихъ количествъ входящихъ въ вопросъ. Сіл формула во всемъ сходствуетъ съ формулою (2) § 145, выражающею скорость ядра,и выведенною изъ качаній маятника; такъ что, если въ послѣдней поставимъ вѣсъ P, на мѣсто множителя $p+b$, выражающаго совокупный вѣсъ ядра и маятника, получимъ первую.

§ 156. Если въ предъидущемъ выраженіи (4), на мѣсто множителя $\sqrt{k}$, поставимъ величину его $=\frac{60\sqrt{q}}{n}$, какъ то было сдѣлано въ членѣ 147, то получимъ

$$v=\frac{60\,Plc}{birn}\sqrt{gq} \ldots\ldots (5)$$

вотъ формула для опредѣленія скорости ядра, выраженная въ функціи числа размаховъ, которые дѣлаетъ пушка въ одну минуту, и другихъ количествъ принадлежащихъ къ вопросу. Изъ оной видно, что въ случаѣ количествъ P, l, b, i, r, n, постоянно сохраняющихъ ту же величину, скорости относятся между собою, какъ соотвѣтственныя ихъ хорды. По сему, когда назовемъ u, скорость соотвѣтствующую хордѣ взятой за 1-цу, то будемъ имѣть вообще $v=cu$;

то есть, скорость соотвѣтствующая всякой иной хордѣ *c* найдется, умножая сію хорду *c* на скорость *u*, соотвѣтствующую хордѣ=1-цѣ. *Результаты, найденные по опытамъ Гютона.*

§ 157. При той же длинѣ орудія, скорости ядеръ почти пропорціональны корнямъ квадратнымъ изъ вѣса пороха полагаемаго въ зарды. Однако при зарядахъ, коихъ вѣсъ болѣе половины вѣса ядра, сіе отношеніе скоростей не много уменьшается. Оно существовало бы и для всѣхъ зарядовъ, если бы орудія были неопредѣленной длины.

§ 158. Скорости, сообщаемыя ядрамъ одинаковаго діаметра, но разнаго вѣса, при выстрѣлахъ изъ того же орудія одинаковыми зарядами, находятся въ обратномъ отношеніи корней квадратныхъ изъ вѣсовъ сихъ ядеръ.

§ 159. Съ увеличиваніемъ заряда, скорость ядра увеличивается только до нѣкотораго предѣла, различнаго для каждой длины орудія; послѣ чего, скорость постепенно уменьшается, покуда каналъ со всѣмъ наполнится порохомъ. А это показываетъ, что каждая длина орудія имѣетъ свой собственный сильнѣйшій зарядъ. Таковой зарядъ бываетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ ка-

налъ длиннѣе; однако онъ не увеличивается въ томъ же отношеніи, какъ длины каналовъ. Длина сильнѣйшаго заряда, считая оную въ доляхъ отъ цѣлаго канала, съ длиною сего канала, составляетъ меньшее отношеніе въ длинныхъ орудіяхъ, нежели въ коротких; такъ что, длины сильнѣйшихъ зарядовъ находятся почти въ обратномъ отношеніи корней квадратныхъ изъ длины частей каналовъ, остающихся предъ зарядомъ.

§ 160. При постоянномъ зарядѣ, съ увеличиваніемъ длины канала (до нѣкоторой степени) увеличивается и скорость ядра. Но сіи скорости увеличиваются не пропорціонально длинамъ каналовъ, а находятся между собою нѣсколько въ меньшемъ отношеніи, нежели корни квадратные изъ длинъ каналовъ, и нѣсколько въ большемъ, нежели корни кубичные изъ тѣхъ же длинъ; и кажется наблюдаютъ средину между сими двумя отношеніями.

§ 161. При томъ же орудіи и возвышеніи онаго, дальности полета ядеръ увеличиваются гораздо въ меньшемъ отношеніи, нежели начальныя ихъ скорости, и почти какъ корни квадратные изъ оныхъ скоростей. А потому,

соединивъ сіе отношеніе увеличиванія полета ядеръ съ отношеніемъ увеличиванія начальныхъ *скоростей*, отъ разной длины каналовъ происходящихъ (предъидущее заключеніе), ясно видно, что при равныхъ зарядахъ весьма не много мы увеличимъ дальность полета ядеръ, увеличивъ довольно много длину орудія. Въ самомъ дѣлѣ, дальности полетовъ ядеръ увеличиваются почти, какъ корни пятой степени изъ длинъ каналовъ, каковое увеличиваніе очень мало. Ибо увеличивъ длину канала вдвое, получимъ лишь $\frac{1}{7}$ часть прибавленія къ дальности полета ядеръ.

§ 162. При томъ же орудіи и постоянномъ возвышеніи онаго, времена полета ядеръ почти пропорціональны дальностямъ оныхъ.

§ 163. Не примѣчено, чтобы большій или меньшій вѣсъ орудія, употребленіе пыжей и различная степень силы, которою онѣ прибиваемы бываютъ на зарядъ и на ядро, а также сообщеніе огня заряду въ разныхъ онаго мѣстахъ, имѣли нѣкоторое вліяніе на перемѣну скоростей или дальностей полетовъ ядеръ.

§ 164. Но небольшая прибавка въ зазорѣ орудія, причиняетъ напротивъ довольно боль-

шую потерю въ скорости ядра. Въ самомъ дѣлѣ, съ зазоромъ обыкновенно употребляемымъ и равнымъ $\frac{1}{20}$ доли калибра (*), тратится понапрасну не менѣе, какъ отъ $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{3}$ силы пороха; а какъ ядра не рѣдко имѣютъ діаметръ менѣе установленнаго діаметра, то очень часто пропадаетъ понапрасну половина силы пороха.

§ 165. Кажется, что сопротивленіе противупоставляемое деревомъ углубленію ядеръ не бываетъ постоянно; ибо углубленія, на которыя онѣ вдавливаются при различныхъ зарядахъ, не относятся какъ самые заряды, или, что все равно, какъ квадраты скоростей, но почти какъ логарифмы зарядовъ.

(*) Величина сего зазора принята въ Англійской Артиллеріи; въ нашей же Артиллеріи зазоръ не бываетъ столь великъ (смотри, начальныя основанія Артиллерійскаго искуства, составл. для Юнкерскихъ классовъ Г. Весселемъ.)

ПРИБАВЛЕНІЕ КЪ § 101.

Если сравнимъ первыя двѣ таблицы, помѣщенныя въ концѣ § 101, съ такого же рода таблицами, составленными Артиллерійскимъ Отдѣленіемъ Военно-ученаго Комитета, по способу Ломбара, который можно видѣть на стр. 33 въ Запискахъ объ Артиллерійскомъ Искуствѣ, изданныхъ Г. Весселемъ, Часть II; то съ перваго взгляда представится великое несходство во всѣхъ результатахъ, а именно: при одинакихъ начальныхъ скоростяхъ горизонтальныя дальности, наибольшія высоты полета, времена полета бомбъ, и проч. въ тѣхъ и другихъ таблицахъ, весьма несходны между собою. Такъ на примѣръ у 5-ти-пудовой бомбы:

	По таблицѣ въ концѣ § 101.	По старой таблицѣ.
Начальная скорость...	950 фут...	950 фут.
Горизонтальная дальность полета.....	1243 саж...	2007 саж.
Высота полета.....	470 саж...	655 саж.
Время полета.....	28 сек...	35,57 сек.
Скорость бомбы при паденіи.....	401 фут...	539 фут.
Уголъ паденія бомбы..	67°41′.....	60°16′.

Такое несогласіе въ результатахъ не могло произойти отъ легкихъ перемѣнъ, введенныхъ для достиженія большей точности, въ Теорію навѣсныхъ выстрѣловъ нами изложенную, которая впрочемъ основана на тѣхъ же началахъ и заключаетъ въ себѣ тотъ же способъ вычисленія, коему слѣдовалъ Ломбаръ. По ближайшемъ сравненіи формулъ, здѣсь выведенныхъ о навѣсныхъ выстрѣлахъ, съ формулами Ломбара въ его сочиненіи, Traité du mouvement des projectiles appliqué au tir des bouches à feu § 189 или въ книгѣ: *Основанія Артилерійской и Понтонной науки* § 117 и проч. Часть II, найдется ошибка общая всѣмъ формуламъ, которыя были употреблены Ломбаромъ при составленіи балистическихъ таблицъ, отъ которой произошла вышепоказанная разность между численными выводами. Дабы удостовѣриться въ этомъ, стоитъ только показать ошибочность значенія, приписуемаго количеству c въ первыхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ, изъ коихъ выведены всѣ дальнѣйшія формулы для нумерическаго вычисленія; онѣ суть слѣдующія (§ 117 Основанія Артилерійской и Понтонной науки Часть II);

$$2\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{hdx}{cds}, \text{ и } \frac{2d^2y}{dt^2} = k - \frac{hdy}{cds},$$

и предполагаютъ величину $c = \frac{4aD}{3n}$;

Но по § 66, Основанія Артиллерійской и Понтонной науки Часть II, укосняющая сила сопротивленія воздуха по направленію движенія бомбы, въ каждой точкѣ пути, ею пробѣгаемаго, должна выражаться величиною $\frac{3nh}{2aD}$, которая въ § 117 сихъ Основаній, при изложеніи Теоріи навѣсныхъ выстрѣловъ, сдѣлана для краткости, равною $\frac{h}{c}$; слѣдовательно въ предъидущихъ уравненіяхъ и во всѣхъ формулахъ отъ нихъ происходящихъ, должно считать величину $c = \frac{2aD}{3n}$; вмѣсто которой Ломбаръ въ вычисленіяхъ своихъ, взялъ въ два раза большую; такъ что результаты таблицъ отдалились значительно отъ истинныхъ. По этой причинѣ предлагаются здѣсь новыя балистическія таблицы, коихъ составленіе и употребленіе, какъ прежнихъ, остается то же и подробно описано въ Запискахъ объ Артил-

мерійскомъ Искуствѣ Г. Весселя стр. 35 и проч. Часть II. При семъ надлежитъ замѣтить, что таковыя таблицы пріобрѣли бы высшую степень точности, когда бы онѣ составлены были изъ гораздо большаго числа данныхъ, нежели по тремъ пробнымъ выстрѣламъ (смотри помянутыя Записки объ Артиллерійскомъ Искуствѣ Г. Весселя стр. 35); и отъ зарядовъ болѣе стѣснѣнныхъ между собою, на примѣръ, простирающихся въ прогрессіи 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$ и проч. фунтовъ: и это совершенно необходимо по причинѣ быстраго и неправильнаго измѣненія дальностей полета, въ промежуткѣ отъ заряда въ 2 фунт. до заряда 7 фунт. для 5-ти-пудовой бомбы; и отъ заряда въ 1 фунтъ до заряда 4 фунт. для 2-хъ-пудовой бомбы.

ТАБЛИЦА I.

Показывающая полеты 5-ти и 2-хъ пудовыхъ бомбъ, отъ разныхъ зарядовъ, при возвышеніи мортиры на 45°, когда въ зарядъ употребленъ порохъ, коего 9 золотниковъ бросаютъ пробное ядро на 51 сажень.

Количество пороха въ зарядъ.	Начальная скорость бомбъ.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета.	Скорость бомбъ при паденіи.	Уголъ паденія бомбъ.
Для пяти пудовой бомбы.						
Фунты.	Футы.	Сажени.	Сажени.	Полусекун.	Футы.	град. мин.
2	286	296	81	24	236	50° 6′
3	377	454	131	30	280	52 53
4	480	630	191	36	316	56 9
5	564	765	243	41	338	58 38
6	627	860	282	44	352	60 25
7	677	930	312	46	360	61 36
8	715	980	335	48	366	62 29
9	750	1025	356	49	372	63 19
10	785	1065	375	50	377	64 4
11	821	1109	397	52	383	64 55
12	852	1143	415	53	387	65 35
Для 2-хъ пудовой бомбы.						
1	307	310	89	24	233	52 16
2	552	650	215	38	304	60 48
3	769	875	323	46	337	66 32
4	909	990	389	50	356	69 45
5	978	1042	420	52	365	71 6

ТАБЛИЦА II.

Показывающая полеты 5-ти и 2-хъ пудовыхъ бомбъ, отъ разныхъ зарядовъ, при возвышеніи мортиры на 45°, когда въ зарядъ употребленъ порохъ, коего 9 золотниковъ бросаютъ пробное ядро на 48 саженъ.

Количество пороха въ зарядѣ	Начальная скорость бомбъ.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета.	Скорость бомбъ.	Уголъ паденія бомбъ.
Для 5-ти пудовой бомбы.						
Фунты.	Футы.	Сажени.	Сажени	Полусекун.	Футы.	Град. мин
2	277	281	76	23	231	49° 50′
3	366	434	124	29	275	52 31
4	466	607	183	35	312	55 46
5	547	739	233	40	334	58 8
6	608	833	271	43	348	59 58
7	657	903	300	45	357	61 8
8	694	955	322	47	363	62
9	728	997	343	48	369	62 48
10	760	1037	362	49	374	63 33
11	796	1080	383	51	379	64 22
12	826	1114	400	52	384	65 1
Для 2-хъ пудовой бомбы.						
1	298	296	84	24	229	51 55
2	335	629	206	37	301	60 18
3	746	855	312	45	334	65 58
4	882	969	377	50	352	69 10
5	949	1020	407	51	361	70 34

ТАБЛИЦА III.

Показывающая полеты 5-ти и 2-хъ пудовыхъ бомбъ, отъ разныхъ зарядовъ, при возвышеніи мортиры на 45°, когда въ зарядъ употребленъ порохъ, коего 9 золотниковъ бросаютъ пробное ядро на 45 саженъ.

Количество пороха въ зарядъ	Начальная скорость бомбъ.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета	Скорость бомбъ при паденіи.	Уголъ паденія бомбъ.
Для 5-ти пудовой бомбы.						
Фунты.	Футы.	Сажени.	Сажени	Полу-секун.	Футы.	Град мин.
2	269	267	72	22	226	49° 35′
3	354	413	117	28	270	52 7
4	451	582	174	34	307	55 21
5	530	712	225	39	330	57 37
6	589	804	259	42	344	59 26
7	636	873	288	44	354	60 38
8	672	923	309	46	360	61 29
9	704	966	328	47	365	62 14
10	735	1006	347	48	370	62 58
11	771	1050	368	50	375	63 47
12	800	1085	385	51	380	64 27
Для 2-хъ пудовой бомбы.						
1	288	281	80	25	224	51 34
2	518	608	197	37	298	59 47
3	722	833	300	44	331	65 21
4	854	946	364	48	349	68 35
5	919	997	393	50	357	69 57

ТАБЛИЦА IV.

Показывающая полеты 5-ти и 2-хъ пудовыхъ бомбъ, отъ разныхъ зарядовъ, при возвышеніи мортиры на 45°, когда въ зарядъ употребленъ порохъ, коего 9 золотниковъ бросаютъ пробное ядро на 42 сажени.

Количество пороха въ зарядѣ	Начальная скорость бомбъ.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета.	Скорость бомбъ при паденіи.	Уголъ паденія бомбъ.
Для 5-ти пудовой бомбы.						
Фунты	Футы.	Сажень.	Сажени.	Полусекун.	Футы.	Град мин.
2	260	252	68	22	221	49° 20′
3	342	392	111	28	264	51 45
4	436	556	165	33	302	54 51
5	512	683	211	38	325	57 5
6	569	773	247	41	340	58 48
7	614	841	274	44	349	60 6
8	649	892	295	45	356	60 57
9	681	915	315	46	361	61 41
10	710	974	332	47	366	62 22
11	745	1019	353	49	371	63 12
12	773	1053	369	50	376	63 50
Для 2-хъ пудовой бомбы.						
1	279	268	75	23	220	51 16
2	501	586	188	36	294	59 16
3	698	810	289	44	328	64 46
4	825	922	350	48	344	67 53
5	888	973	380	50	353	69 18

ТАБЛИЦА V.

Показывающая полеты 5-ти и 2-хъ пудовыхъ бомбъ, отъ разныхъ зарядовъ, при возвышеніи мортиры на 45°, когда въ зарядъ употреблень порохъ, коего 9 золотниковъ бросаютъ пробное ядро на 38 сажень.

Количество пороха въ зарядѣ	Начальная скорость бомбъ.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета	Скорость бомбъ при паденіи.	Уголъ паденія бомбъ.
Для 5-ти пудовой бомбы.						
Футы.	Футы.	Сажени.	Сажени	Полу-секунд	Футы	Град мину.
2	247	231	62	21	213	48° 55′
3	325	362	111	26	256	51 15
4	414	518	152	32	295	54 3
5	487	642	196	36	318	56 21
6	541	730	229	39	333	57 57
7	584	796	256	42	343	59 16
8	617	845	276	44	350	60 10
9	647	889	294	45	356	60 54
10	676	928	312	46	360	61 34
11	709	973	331	47	365	62 21
12	735	1006	347	48	370	62 58
Для 2-хъ пудовой бомбы.						
1	265	246	69	22	212	50 47
2	476	552	175	34	288	58 22
3	664	775	272	43	322	63 51
4	785	889	331	46	339	66 56
5	844	938	359	49	347	68 20

ТАБЛИЦА VI.

Показывающая полеты 5-ти и 2-хъ пудовыхъ бомбъ, отъ разныхъ зарядовъ, при возвышеніи мортиры на 45°, когда въ зарядъ употребленъ порохъ, коего 9 золотниковъ бросаютъ пробное ядро на 24 сажени.

Количество пороху въ зарядѣ.	Начальная скорость бомбъ.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета	Скорость бомбы при паденіи.	Уголъ паденія бомбъ.
Для 5-ти пудовой бомбы.						
Фунт	Футы.	Сажени.	Сажени	Полу-секунд	Футы.	Град. мину.
2	233	210	56	20	203	48° 30′
3	308	333	92	25	248	50 46
4	392	480	139	31	286	53 22
5	460	597	179	35	310	55 36
6	512	683	211	38	325	57 5
7	553	749	237	40	336	58 19
8	584	796	256	42	343	59 16
9	612	838	273	43	349	60 3
10	639	877	289	45	354	60 42
11	670	920	308	46	359	61 26
12	696	956	324	47	363	62 2
Для 2-хъ пудовой бомбы.						
1	251	62	62	21	205	50 18
2	451	162	162	33	281	57 28
3	628	254	254	41	316	62 53
4	742	310	310	45	334	65 52
5	798	337	337	47	341	67 15

ПРИБАВЛЕНІЕ ВТОРОЕ.

О способѣ интерполяціи и приложеніи онаго къ составленію таблицъ, до практики Артилерійской касающихся.

I. Способъ вставлять, между данными членами какого либо ряда, новые члены подверженные одинакому закону происхожденія съ первыми, называется *интерполяціею*. Для этого, разные члены ряда почитаются какъ частныя величины Функціи, выражающей общій членъ, который обыкновенно бываетъ неизвѣстенъ, и коего аналитическое выраженіе должно быть выведено изъ ограниченнаго числа частныхъ сихъ величинъ. Но видно, что можно удовлетворить подобнымъ условіямъ, брать, для искомаго выраженія, многоразличныхъ видовъ функціи, которыя бы заключали число постоянныхъ произвольныхъ, достаточное для повѣрки уравненій происходящихъ отъ условій. По сему, общее рѣшеніе задачи, касательно интерполяціи, остается неопредѣленнымъ; и

приводится къ составленію уравненія кривой линіи, проходящей чрезъ данныя точки, конхъ абсциссы изображаютъ величины перемѣнной независимой, а ординаты, величины функціи. Однако же, въ какомъ бы числѣ эти точки ни были, кривая не можетъ принять на себя опредѣленный видъ, пока онъ остается неизвѣстнымъ. Если же члены интерполируемаго ряда довольно будутъ сближены между собою, то можно принять, что искомая функція, выражающая общій членъ, разложена по восходящимъ степенямъ перемѣнной, и что она ощутительно слѣдуетъ закону соизмѣримыхъ и цѣлыхъ функцій, имѣющихъ постоянныя разности. Тогда въ разложеніи, которое будетъ сходящимся, можно ограничиться только нѣкоторымъ числомъ первыхъ степеней перемѣнной; и видъ функціи сдѣлается уже опредѣленнымъ.

И такъ положимъ, что величинамъ

$$x_1\ x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots\ldots$$

какой ни есть перемѣнной, соотвѣтствуютъ частныя величины

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots\ldots$$

искомой функціи; и что для всякой иной величины x', имѣемъ

$$u' = \alpha + \beta x' + \gamma x'^2 + \delta x'^3 + \ldots\ldots$$

требуется опредѣлить коеффиціенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots$, по условію, что когда перемѣнимъ x' въ x, x_1, x_2, $x_3 \ldots\ldots$, величина u' сдѣлается послѣдовательно равною u, u_1, u_2, $u_3 \ldots\ldots$

Въ слѣдствіе этого условія, сдѣлавъ постановленіе, будемъ имѣть уравненія

$$u = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots\ldots,$$

$$u_1 = \alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2 + \delta x_1^3 \ldots\ldots,$$

$$u_2 = \alpha + \beta x_2 + \gamma x_2^2 + \delta x_2^3 + \ldots\ldots,$$

$$u_3 = \alpha + \beta x_3 + \gamma x_3^2 + \delta x_3^3 + \ldots\ldots,$$

и проч.....,

которыхъ число должно быть равно числу неопредѣленныхъ коеффиціентовъ α, β, γ, δ и проч.; и вотъ какъ найдутся ихъ выраженія. Вычтя первое уравненіе изъ втораго, второе изъ третьяго, и т. д. и произшедшія разности, раздѣливъ соотвѣтственно на $x_1 - x$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, и проч. получимъ

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \beta + \gamma(x_1 + x) + \delta(x_1^2 + x_1 x + x^2) + \ldots\ldots,$$

$$\frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} = \beta + \gamma(x_2 + x_1) + \delta(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) + \ldots\ldots,$$

$$\frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2} = \beta + \gamma(x_3 + x_2) + \delta(x_3^2 + x_3 x_2 + x_2^2) + \ldots\ldots,$$

и проч.

Положивъ, для краткости,

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = U, \frac{u_2 - u_1}{x_2 - u_1} = U_1, \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2} = U_2 \ldots\ldots,$$

будемъ имѣть уравненія

$$U = \beta + \gamma(x_1 + x) + \delta(x_1^2 + x_1 x + x^2) + \ldots\ldots,$$

$$U_1 = \beta + \gamma(x_2 + x_1) + \delta(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) + \ldots\ldots,$$

$$U_2 = \beta + \gamma(x_3 + x_2) + \delta(x_3^2 + x_3 x_2 + x_2^2) + \ldots\ldots,$$

и проч.....

Вычтя опять U изъ U_1, U_1 изъ U_2, и т. д. и сдѣлавъ для краткости,

$$\frac{U_1 - U}{x_2 - x} = U', \frac{U_2 - U_1}{x_3 - x_1} = U'_1, \text{ и проч.....}$$

перейдемъ къ уравненіямъ

$$U' = \gamma + \delta(x_2 + x_1 + x) + \ldots\ldots,$$

$$U'_1 = \gamma + \delta(x_3 + x_2 + x_1) + \ldots\ldots,$$

и проч.....

изъ коихъ, чрезъ новое вычитаніе, найдется

$$U'_1 - U' = \delta(x_3 - x) + \ldots\ldots,$$

и проч.....

теперь сдѣлавъ

$$\frac{U'_1 - U'}{x_3 - x} = U'', \text{ и проч.....}$$

будемъ имѣть

$$U'' = \delta + \text{и проч.....}$$

Такимъ образомъ можно продолжать дѣйствіе

и далѣе. Но, для большей ясности, положимъ, что мы ограничились въ выраженіи u' четырмя членами, и имѣемъ четыре данныя величины u, u_1, u_2, u_3; тогда дѣйствіе кончится послѣднимъ уравненіемъ. Взявъ изъ него величину δ, и опредѣляя величины γ, β, α посредствомъ U′, U, u, найдется

$$\delta = U''$$

$$\gamma = U' - U''(x_2 + x_1 + x)$$

$$\beta = U - U'(x_1 + x) + U''(x_2 x_1 + x_2 x + x_1 x)$$

$$\alpha = u - Ux + U' x_1 x - U'' x_2 x_1 x.$$

Поставивъ сіи величины въ выраженіе отъ u', будемъ имѣть

$$u' = u + U(x' - x) + U'\left\{x'^2 - (x_1 + x)x' + x_1 x\right\} + U''\left\{x'^3 - (x_2 + x_1 + x)x'^2 + (x_2 x_1 + x_2 x + x_1 x)x' - x_2 x_1 x\right\}$$

Легко примѣтить, что коеффиціенты величинъ U, U′ и U″ разлагаются на простыхъ множителей, и что выраженіе u' можно привесть къ виду

$$u' = u + U(x' - x) + U'(x' - x)(x' - x_1) + U''(x' - x)(x' - x_1)(x' - x_2)$$

Поступая такимъ образомъ, мы получили бы подобную формулу для какого ни есть числа данныхъ величинъ, и вообще имѣли бы,

$$u' = u + U(x' - x) + U'(x' - x)(x' - x_1) + U''(x' - x)(x' - x_1)(x' - x_2) + U'''(x' - x)(x' - x_1)(x' - x_2)(x' - x_3) + \text{и пр.}$$

полагая при семъ

$$\frac{u_1-u}{x_1-u}=U, \frac{u_2-u_1}{x_2-x_1}=U_1, \frac{u_3-u_2}{x_3-x_2}=U_2, \frac{u_4-u_3}{x_4-x_3}=U_3, \text{и пр.},$$

$$\frac{U_1-U}{x_2-x}=U', \frac{U_2-U_1}{x_2-x_1}=U'_1, \frac{U_3-U_2}{x_4-x_2}=U'_2, \text{ и пр.},$$

$$\frac{U'_1-U'}{x_3-x}=U'', \frac{U'_2-U'_1}{x_4-x_1}=U''_1, \text{ и проч.}$$

$$\frac{U''_1-U''}{x_4-x}=U''', \text{ и проч.},$$

и проч.....

Въ частномъ случаѣ, когда величины x, x_1, x_2, x_3, *и проч., суть равноразнствующія (идущія въ прогрессіи арифметической), будетъ* $x_1=x+h$, $x_2=x+2h$, $x_3=x+3h$, *и проч.;* и такъ, дѣлая тогда первыя разности, между послѣдовательными величинами u, u_1, u_2, u_3, *и пр.*,

$$u_1-u=\Delta u,\ u_2-u_1=\Delta u_1,\ u_3-u_2=\Delta u_2,$$

$$u_4-u_3=\Delta u_3, \text{ и проч....},$$

вторыя разности

$$\Delta u_1-\Delta u=\Delta.\Delta u=\Delta^2 u,\ \Delta u_2-\Delta u_1=\Delta.\Delta u_1=\Delta^2 u_1,$$

$$\Delta u_3-\Delta u_2=\Delta^2 u_2, \text{ и проч....},$$

третія разности

$$\Delta^2 u_1-\Delta^2 u=\Delta\,\Delta^2 u=\Delta^3 u, \Delta^2 u_2-\Delta^2 u_1=\Delta^3 u_1, \text{и пр.},$$

четвертыя разности

$$\Delta^3 u_1-\Delta^3 u=\Delta^4 u, \text{ и проч.....},$$

предъидущія выраженія для U, U_1, U_2,..... U', U'_1,.....,

примутъ видъ

$$U=\frac{\Delta u}{h},\ U_1=\frac{\Delta u_1}{h},\ U_2=\frac{\Delta u_2}{h},\ U_3=\frac{\Delta u_3}{h},\ \text{и пр.},$$

$$U'=\frac{\Delta^2 u}{1.2h^2},\quad U'_1=\frac{\Delta^2 u_1}{1.2h^2},\quad U'_2=\frac{\Delta^2 u_2}{1.2h^2},\ \text{и пр.},$$

$$U''=\frac{\Delta^3 u}{1.2\,3h^3},\quad U''_1=\frac{\Delta^3 u_1}{1.2.3\,h^3},\ \text{и проч},$$

$$U'''=\frac{\Delta^4 u}{1.2.34\,h^4},\ \text{и проч.....},$$

Кромѣ того, если сдѣлаемъ $x'=x+h'$, будемъ имѣть

$$x'-x=h',\quad x'-x_1=h'-h,\quad x'-x_2=h'-2h,$$
$$x'-x_3=h'-3h,\ \text{проч.},$$

и найденное выраженіе отъ u' получитъ видъ

$$u'=u+\frac{h'}{h}\Delta u+\frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u+$$
$$\frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.\ 2h.\ 3h}\Delta^3 u+\text{.....(a)}.$$

Вотъ формула обыкновенно употребляемая при интерполяціи (*).

II. Чтобы показать употребленіе послѣдней формулы въ Артиллеріи, приложимъ оную къ составленію таблицъ относящихся къ прицѣльнымъ выстрѣламъ; и положимъ, что изъ мно-

(*) По сему предмету см. *Traité élémentaire de calcul differ. et de calcul integ. par Lacroix. 4. édit. n°* 382 и проч.

гихъ горизонтальныхъ дальностей паденія ядра, произведенныхъ одинакимъ зарядомъ, и при каждой высотѣ прицѣла измѣняющейся постояннымъ количествомъ, составлена средняя дальность. На примѣръ (*); при горизонтальномъ направленіи оси канала получены дальности 823, 791, 838, 731, 971, 1071, 1041, 1054, 828, 1228, 1070, 828, 892, 936, 891 локтей Саксонскихъ, и средняя $\frac{13993}{15}$=933 лок.

При высотѣ прицѣла на одинъ дюймъ, получены дальности 1120, 1216, 1306, 1156, 1315, 1163, 1374, 1060, 1236, 1330, 1110, 1273, и средняя $\frac{14659}{12}$=1222 лок.

При 2-хъ дюймахъ, получены дальности 1468, 1527, 1581, 1387, 1526, 1411, 1674, 1563, 1370, 1615, 1527, 1617, 1697, и

средняя $\frac{19963}{13}$=1536 лок.

При 3 хъ дюймахъ, дальности 1901, 2226, 1845, 1907, 1814, 1872, 1950, 2088, 2118,

средняя $\frac{17721}{9}$=1969 лок.

При 4-хъ дюймахъ, дальности 2002, 2181,

(*) Этотъ примѣръ взятъ изъ: *Vorlesungen über die Artillerie, von F. G. Rouvroy.*

2094, 1988, 2104, 2030, 2057, 2016, 2204,

средняя $\frac{18677}{9}$=2076 лок.

При 5-ти дюймахъ, дальности 2241, 2440, 2065, 2147, 2532, 2323, 2217, 2372, 2505,

средняя $\frac{20842}{9}$=2316 лок.

Наконецъ при 6-ти дюймахъ высоты прицѣла, найдены дальности 2435, 2237, 2299, 2501, 2328, 2743, 2776, 2426, 2015, 2361, 2635, 2654, 2388, и среднял $\frac{31798}{13}$=2446 лок.

Составимъ изъ среднихъ дальностей, которыя должны быть взяты вмѣсто величинъ u, u_1, u_2, u_3, u_4, и проч., послѣдовательныя разности первыя, вторыя, третія, и проч.; что видно изъ слѣдующей таблицы.

Высоты прицѣла.	Среднія дальности.	Первыя разности.	Вторыя разности.	Третія разности.	Четвертыя разности.	Пятыя разности.	Шестыя разности.
0	933						
1	1222	289					
2	1536	314	25				
3	1969	433	119	94			
4	2075	106	-327	-446	-540		
5	2316	241	135	462	908	1448	
6	2446	130	-111	-246	-708	-1616	-3064

Такимъ образомъ будемъ имѣть, по принятому въ предъидущей Теоріи знакоположенію, величины

$$u=933,\ \Delta u=289,\ \Delta^2 u=25,\ \Delta^3 u=94,$$
$$\Delta^4 u=-540,\ \Delta^5 u=1448,\ \Delta^6 u=-3064,\ h=1;$$

и уравненіе (a), по постановленіи этихъ величинъ, обратится въ

$$u'=933+h'.289+\frac{h'(h'-1)}{2}.25+\frac{h'(h'-1)(h'-2)}{2.3}.94$$
$$-\frac{h'(h'-1)(h'-2)(h'-3)}{2.3.4}.540+\frac{h'(h'-1)(h'-2)(h'-3)(h'-4)}{2.3.4.5}.1448$$
$$-\frac{h'(h'-1)(h'-2)(h'-3)(h'-4)(h'-5)}{2.3.4.5.6}.3064;$$

посредствомъ коего, для всякой высоты h' прицѣла, найдется соотвѣтствующая горизонтальная дальность паденія$=u'$; и обратно, по извѣстной дальности u', найдется высота прицѣла. Но въ послѣднемъ случаѣ будемъ имѣть, для разрѣшенія, уравненіе шестой степени,

$$383h'^6-6831h'^5+4544h'^4+137745h'^3+184622h'^2$$
$$-111779h'+90u'-83970=o.$$

Дѣлая въ семъ уравненіи, по порядку $u'=1000$, 1100, 1200, 1300, 1400, и проч., до 2500 лок., и разрѣшая уравненія 6-й степени, произшедшія отъ каждаго постановленія, составимъ таб-

ницу высотъ прицѣла, соотвѣтствующихъ различнымъ дальностямъ отъ 100 до 100 локтей, начиная съ разстоянія 1000 до 2500 локтей, далѣе сего предѣла формула не можетъ доставить точныхъ результатовъ: это зависитъ отъ свойства самаго ряда.

III. Для 2-го примѣра, возмемъ среднія дальности выстрѣловъ, произведенныхъ изъ $\frac{1}{2}$ пудовой и 6-ти фунтовой мортиръ, на практическомъ ученіи 1832 года въ Августѣ мѣсяцѣ подъ Краснымъ селомъ, въ присутствіи Офицеровъ Артиллерійскаго Училища.

Изъ $\frac{1}{2}$ пудовой мортиры, возвышенной на 45°, стрѣляли зарядами въ 12, 24, 36 и 48 золот., а изъ 6-ти фунтовой, подъ такимъ же возвышеніемъ, стрѣляли зарядами въ 3, 6, 9 и 12 золот. Проба пороха, взятая изъ 10-ти выстрѣловъ пробной мортирки, оказалась равною $42\frac{1}{2}$ саженъ. Всѣ гранаты немного дополненныя пескомъ, вѣсили единообразно, а именно; 6-ти фунтовыя, по 6 фунтовъ, а полупудовыя по 22 фунта. Сверхъ того, онѣ были избраны самыхъ большихъ діаметровъ; наибольшій зазоръ у 6-ти фунтовой гранаты былъ=1,6 линіи, а у полупудовой=1,65 линіи.

Діаметры гранатъ разнились между собою не болѣе 5 точекъ. Для измѣренія діаметра гранатъ былъ употребленъ особенный инструментъ, на подобіе калибромѣра, показывавшій даже сотыя части дюйма.

Среднія дальности, взятыя изъ 10-ти выстрѣловъ, отъ каждаго изъ зарядовъ 12, 24, 36 и 48 золот., коими стрѣляли изъ $\frac{1}{2}$ пудовой мортиры, найдены равными 54, 205, 350 и 470 саженъ.

Среднія дальности, также взятыя изъ 10-ти выстрѣловъ, отъ каждаго изъ зарядовъ 3, 6, 9 12 золот., коими стрѣляли изъ 6-ти фунтовой мортиры, найдены равными 47, 117, 198 и 306 саженъ.

И такъ, относительно выстрѣловъ изъ $\frac{1}{2}$ пудовой мортиры, будемъ имѣть, по предъидущимъ даннымъ,

$$x=12,\ x_1=24,\ x_2=36,\ x_3=48,$$

$$h=x_1-x=x_2-x_1=x_3-x_2=12;$$

$$u=54,\ u_1=205,\ u_2=350,\ u_3=470;$$

$$\Delta u=151,\ \Delta^2 u=+6,\ \Delta^3 u=-19.$$

Теперь поставивъ найденныя величины въ уравненіе (a), получимъ слѣдующую формулу для интерполяціи,

$$u' = 54 + \frac{h'}{12} \cdot 151 - \frac{h'(h'-12)}{12.24} \cdot 6$$

$$\frac{h'(h'-12)(h'-24)}{12.24.36} \cdot 19,$$

въ которой величина $h' = x' - x =$ разности между зарядомъ, для коего ищется соотвѣтствующая дальность, и между первымъ даннымъ зарядомъ равнымъ 12 золот. На примѣръ, если бы понадобилось найти дальность соотвѣтствующую заряду 30 золот., то должно въ предъидущемъ выраженіи сдѣлать $h' = 30 - 12 = 18$; окончивъ вычисленіе по обыкновенію, получимъ оную $= 279$ саж. Такимъ образомъ поступая, получимъ, въ разсужденіи дальностей выстрѣловъ изъ 6-ти фунтовой мортиры, слѣдующее уравненіе

$$u' = 47 + \frac{h'}{3} \cdot 70 + \frac{h'(h'-3)}{3.6} \cdot 11 + \frac{h'(h'-3)(h'-6)}{3.6.9} \cdot 16.$$

Вычисливъ горизонтальныя дальности соотвѣтствующія опредѣленнымъ зарядамъ, помощію предъидущихъ уравненій, можно будетъ легко, по таблицамъ IV и V § 101, узнать и прочія необходимыя обстоятельства при бросаніи; какъ то: начальную скорость, время полета, уголъ паденія и скорость при паденіи,

На примѣръ, при зарядѣ 30 золот., которому соотвѣтствуетъ выше приведенная горизонтальная дальность паденія 279 саж. $\frac{1}{2}$ пудовой гранаты, найдется, по таблицѣ IV, начальная скорость гранаты=311 саж., высота полета=83 саж., время полета=24 полусек.; скорость при паденіи=215 фут. и уголъ паденія=57°11′. Поступая такимъ образомъ, составимъ слѣдующія двѣ таблицы.

Для полупудовой гранаты.

Заряды,	Начальная скорость,	Горизонтальная дальность полета,	Высота полета.	Время полета	Скорость гранаты при паденіи.	Уголъ паденія гранаты.	
золотник.	футы.	сажени.	саженъ.	полусекун	футы.	град.	мин
12....	116	54	15	10	107	46	7
15....	152	91	25	13	134	48	2
18....	186	129	36	16	156	49	44
21....	219	167	47	18	174	51	5
24....	250	205	58	20	190	52	13
27....	280	242	70	22	202	53	39
30....	311	279	83	24	213	55	3
33....	341	315	96	26	222	56	20
36....	372	350	110	27	231	57	39
39....	402	383	125	29	238	58	56
42....	432	414	135	30	245	60	5
45 ..	461	443	147	31	250	61	8
48....	489	470	160	33	255	62	7

Для шести фунтовой гранаты.						
Заряды.	Начальная скорость.	Горизонтальная дальность полета,	Высота полета.	Время полета	Скорость гранаты при паденіи,	Уголъ паденія гранаты.
золот.	футы.	сажени.	сажени.	полусекун.	футы.	град. мин.
3..	115	47	12	9	98	48
4..	138	70	18	11	116	49 9
5..	162	93	25	13	131	50 29
6..	187	117	33	15	144	51 55
7..	214	142	41	17	155	53 28
8..	243	169	50	19	165	55 12
9..	276	198	60	21	175	56 53
10..	313	230	73	22	184	58 50
11..	358	266	89	24	193	61 15
12..	416	306	107	26	202	63 42

Послѣднія двѣ таблицы предполагаютъ пробу пороха въ $42\frac{1}{2}$ сажени; и для такого пороха, который слабѣе или сильнѣе, онѣ не годятся. А по тому, присовокупляется здѣсь еще таблица, соотвѣтствующая пробамъ пороха, взятымъ примѣрно въ 48, 45, 42, 39 и 36 саженъ, и вычисленная на основаніи пропорціи; что скорости выстрѣловъ изъ мортиръ отъ двухъ разныхъ сортовъ пороха, при равныхъ зарядахъ, относятся между собою, какъ корни квадратныя изъ дальностей полетовъ ядра пробной мортирки (Записки объ Артилерійскомъ искуствѣ, Г. Весселя, Ч. II. стр. 57). Хотя она, за исключеніемъ начальныхъ скоростей и горизонтальныхъ дальностей отъ разныхъ зарядовъ, не содержитъ въ себѣ другихъ обстоятельствъ при бросаніи, но сіи послѣднія легко найдутся способомъ выше показаннымъ.

Таблица, показывающая начальныя скорости и горизонтальныя дальности полетовъ $\frac{1}{2}$ пудовой и 6-ти фунтовой гранатъ, отъ разныхъ зарядовъ, при возвышеніи мортиры на 45°, когда въ зарядъ употребленъ порохъ, коего 9 золотниковъ бросаютъ пробное ядро на 48, 45, 42, 39 и 36 саженъ.

	Проба пороха въ 48 саж.		Проба пороха въ 45 саж		Проба пороха въ 42 саж.		Проба пороха въ 39, саж.		Проба пороха въ 36 саж.	
заряды.	начальная скорость гранат.	горизонтальная дальность полета.	начальная скорость гранатъ.	горизонтальная дальность полета.	начальная скорость гранатъ.	горизонтальная дальность полета.	начальная скорость гранатъ.	горизонтальная дальность полета,	начальная скорость гранатъ.	горизонтальная дальность полета.

Для полупудовой гранаты.

золот.	футы.	сажени	футы.	сажень	футы.	сажень	футы.	сажени	футы.	сажени
12..	123	61	119	57	115	53	111	49	107	45
15..	161	101	156	96	151	90	146	85	140	79
18..	198	142	191	135	185	128	178	120	171	112
21..	233	184	225	175	218	166	210	156	201	145
24..	266	224	257	214	248	203	239	192	230	181
27..	297	262	288	251	278	239	268	227	258	215
30..	330	302	320	290	309	277	298	264	286	249
33..	362	339	351	327	339	313	327	298	314	283
36..	395	376	383	362	370	347	356	333	342	316
39..	427	409	414	395	400	381	385	365	370	348
42..	459	441	444	427	429	411	414	395	398	379
45..	490	471	474	456	458	440	442	425	424	406
48..	520	498	503	483	486	467	468	450	450	433

Для шести фунтовой гранаты.

зо-лот.	фу-ты	са-жени	фу-ты	са-жени	фу-ты	са-жени	фу-ты.	са-жени	фу-ты.	са-жени
3..	122	54	118	50	114	46	110	42	106	38
4..	147	79	142	74	137	69	132	64	127	59
5..	172	103	167	98	161	92	155	86	149	80
6..	199	128	192	122	186	116	179	109	172	102
7..	227	154	220	148	213	141	205	134	197	126
8..	258	183	250	176	241	168	233	160	224	151
9..	293	213	284	205	274	197	264	188	254	179
10..	333	246	322	237	311	228	300	219	288	209
11..	380	284	368	274	356	264	343	254	329	243
12..	442	323	428	314	413	304	398	295	383	284

ПОГРѢШНОСТИ.

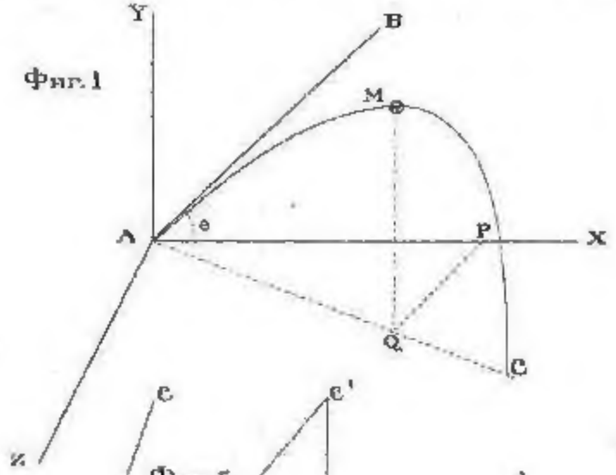
Стр.	Строк.	Напечатано.	Читай.
5	6 снизу	преодолевавшему	преодолѣвшему
7	8 ——	кординатъ	координатъ
8	5 ——	$\frac{dx}{dt}=c_1$	$\frac{dx}{dt}=c_1$
11	5 ——	въ низъ и по	внизъ, и по
17	6 ——	въ уравненіе	въ уравненіи
18	1 ——	величины вѣсй	величины, кѣсй
27	4 ——	a^2-4bh....	$-a^2-4bh$....
51	8 ——	$2h$ было $>$	$2h>$
—	6 ——	$\sqrt{4h^2+4bh-a^2}$	$\sqrt{4h^2+4bh-a^2}$
53	8 ——	и $tg\theta$	и $tg\theta'$
55	1 ——	$tg(\theta-\theta')$	$tg(\theta+\theta')$
—	2 ——	$\frac{a}{b}$	$-\frac{a}{b}$
—	5 ——	въ числитель $ab+tg\theta$	$a+btg\theta$
42	1 ——	въ числитель ag^2	a^2g
46	12 ——	проходящій	проходящей
—	1 ——	прицѣдлла ожно	прицѣла должно
48	4 ——	болѣе	далѣе
53	4 ——	L;	α;
61	9 ——	также	та же
—	2 ——	извѣстнымъ:	извѣстными:
64	2	въ числитель $ba'^2-ba'^2$	$ba'^2-b'a^2$
—	4 ——	$tg\theta'=\frac{2(y-b')}{a'-x}=\frac{2b(a'-x)}{2ax-a^2}$	$tg\theta'=\frac{2(y-b')}{a'-x}\frac{2b(a'-x)}{2ax-a^2}$
—	4	въ числитель $b'a$	$b'a^2$
—	9 ——	$h\cos^2.tg\theta'$	$h\cos^2\theta.tg^2\theta'$
66	4 ——	$\sqrt{\frac{g-b'}{g}}$	$\sqrt{\frac{y-b'}{y}}$
74	13 ——	или	сила
—	15 ——	опрѣдѣляется	опредѣлятся
81	3 ——	$AR=AD\nu^2$	$MR=AD\nu^2$
83	4 ——	$AD\nu^2\sin^2\alpha$	$AD\nu^2\sin^2\alpha$
84	8 ——	$MD=2ARgh$	$MR=2ADgh$

Стр.	Строк.		Напечатано.	Читай.
98	1	снизу	$\frac{rdx}{r}$	$\frac{rdx}{y}$
99	11	—	въ числителѣ $(r-x)$	$(r-x)^4$
104	13	—	200	2000
110	6	—	т, п.	m и n
111	8	—	перемѣняется	перемѣнятся
112	7	—	фунтахъ	футахъ
113	3	—	фунтахъ	футахъ
122	1	—	5,553 зол.	5,593 зол.
123	2	—	сопротивленія	сопротивленіе
—	11	—	по средней	со средней
—	5	—	принадлежитъ	принадлежатъ
126	1	—	$x=\frac{1}{m}\,l(mv-n)+C$	$x=-\frac{1}{m}\,l(mv-n)+C$.
—	10	—	скорость $h=a$	скорость $=a$
129	6 и 7	—	предложеніяхъ	предположеніяхъ
134	8	—	ускорительная	укоснительная
139	10	—	$cv^2=g$	$cv'^2=g$
147	3		$l\left(a\sqrt{\frac{c}{g}}+\sqrt{1+\frac{c}{g}a^2}\right.$	$l\left(a\sqrt{\frac{c}{g}}+\sqrt{1+\frac{c}{g}a^2}\right)$
150	1	—	Lm	αm
154	8	—	одна	одну
155	7	—	вмѣсто 3-го знака $=$	$-$
160	5	—	каковыя	каковая
164	3	—	и сверхъ	и свѣривъ
166	1	въ знаменат.	$g\cos\gamma'$	$g\cos\theta$
167	4	въ знаменат.	$2gt\gamma'$	$2tg\gamma$
171	2	—	съ которой	за которой
175	7	—	точки o	точки C
178	5	—	510	570
—	4	—	AC=250	AC=150
184	3	—	въ числит. 2-го равенства e^{cx}	$e^{cx''}$
186	3	—	$\theta=3°19'7''$	$\theta'=3°19'7''$
188	6	—	составляемы	составляемыхъ
194	7	—	вмѣсто 2-го знака $=$	$-$
—	9	—	вмѣсто 2-го знака $=$	$+$
—	13	—	вмѣсто 3-го знака $+$	$=$

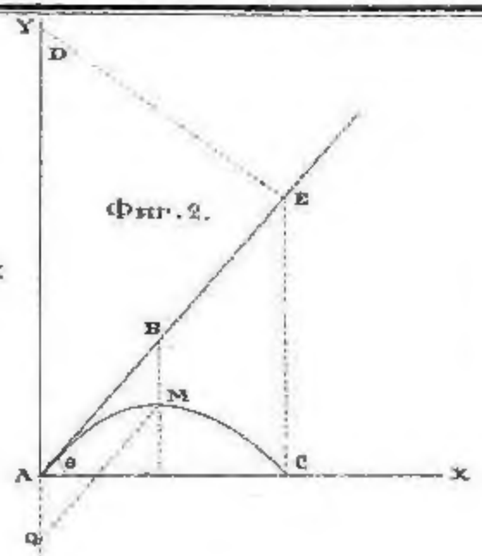
Стр.	Строк.	Напечатано.	Читай.
197	5 снизу	AmD	AMD
200	3 ——	$p\sqrt{c+p^2}$	$p\sqrt{1+p^2}$
207	10 ——	*въ знаменат.* $\sqrt{1+p^2}$	$c\sqrt{1+p^2}$
214	5 ——	$\smile AM'$, или $\smile AM$	$\smile AM' - \smile AM$,
216	4 ——	крѣпкости	краткости
217	3 ——	*въ знаменат.* $2Mc\sqrt{gc}$	$2M\sqrt{gc}$
—	6 ——	$\frac{tg\alpha}{}$	$\frac{tg\alpha}{cos\alpha}$
220	10 и 9 —	которая	которая бы
224	7 ——	$\frac{sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\alpha}$	$\frac{sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}$
—	1 ——	по	посему найдется
226	2 ——	$\lambda=0725$	$\lambda=0,725$
228	3 —	*во 2-мъ столбцѣ* 0,3462343	0,3460343
—	8 —	*въ 7-мъ столбцѣ* 0,5427623	0,5428623
231	9 ——	*въ знаменат.* $59°52'52''$	$tg\,59°52'52''$
232	7 ——	0,0217343	0,0217543
233	4 ——	пропорціонными	пропорціональными
240		*въ заглавіи 5-го и 6-го столбцовъ, каждой таблицы IV и V, вмѣсто* бомбы *читай* гранаты	
—		*во 2-мъ столбцѣ таблицы V, противъ* 300 *напечат.* 250 *читай* 219	
243	5 ——	инсходящей,	инсходящей вѣтви
246	3 ——	$\frac{m^5x'}{2.3.4}+\ldots$	$\frac{m^5x'^5}{2.3.4}+\ldots$
—	9 и 14 —	Q	θ
249	5 ——	*во 2-мъ столбцѣ* 42..39	40..30
—	6 ——	*въ 1-мъ столбцѣ* 0,6919	0,6910
251	14 ——	по самое	на самое
253	1 и 2 —	къ которомъ	въ которомъ
258	12 ——	*подведи 2-й множитель подъ знакъ корня*	
259	7 ——	§ 107	§ 106
260	7 ——	паденіе ядра	паденіе одного ядра
262	4 ——	*въ 1-й части уравн.* $e^{m\varepsilon x}$	$e^{m\varepsilon x'}$
263	4	*пропущенъ знакъ = между a и корнемъ*	
—	4 и 7 —	$b=\delta tg\theta+\ldots$	$b=-\delta tg\theta+\ldots$
265	13 ——	*во 2-мъ уравн.* $mxLe$	$mx'Le$
266	3 ——	$e^{-m\varepsilon x}$	$e^{m\varepsilon x}$
267	3 ——	αe	Le

Стр.	Строк.	Напечатано.	Читай.
270	9 снизу	*въ знаменат.* $x'tg\theta - y$	$xtg\theta - y$
274	3 ——	$\frac{p\pi k_2}{4}$	$\frac{p\pi k^2}{4}$
275	4 ——	превратился	превратится
—	11 и 12	относительно	относительныхъ
279	5 ——	въ стволѣ	въ стволъ
281	2 ——	ядра	пули
282	6 ——	700 фут.	7000 фут.
284	6 ——	скорость v	скорость v'
285	10 ——	въ предположеніе	въ предположеніи
286, 287 288		*подъ каждымъ коренным знакомъ въ числителѣ вмѣсто буквы* b *поставъ* 6	
286	10 ——	къ каморою	съ каморою
—	11 ——	долыно	должно
293	5 ——	дальности	изъ дальности
294	4 ——	и вставленную	и вставленную вертикально въ впадину выдолбленную
297	4 ——	принебрегли	пренебрегли
299	2 ——	4,7105 фут.	4,7195 фут.
301	15 и 16	показанною	показанную
302	2 ——	къ вертикальной	въ вертикальной
303	2 ——	при коемъ бы	при коемъ
304	2 ——	перемѣнивъ	перемѣнитъ
312	11 ——	большею	большою
319	7 ——	сего рода маятника	сего маятника
—	7 ——	$cg = l$	$CG = L$
—	9 ——	$cg = k$	$CS = k$
—	10 ——	$cv = i$	$CV = i$
320	4 ——	начальная скорость	начальная угловая скорость
321	13 ——	*въ числит.* $b'ki$	$bk'i$
322	7 ——	cu	CU
—	7 ——	$v : z$	$r : z$
325	5 ——	$\frac{5}{500}$	$\frac{1}{500}$
—	4 ——	*въ числит.* $bi(k+k)$	$bi(k+k')$
326	4 ——	$\frac{p_1}{50000}$	$\frac{pl}{50000}$
330	8 ——	$k = \frac{60.q^2}{n^2}$ фут.	$k = \frac{60^2.q}{n^2}$ фут.
337	10 ——	описываемой	описываемой отдачею пушки повѣшенной

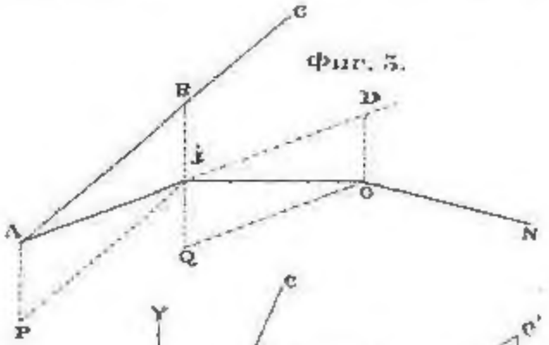
Фиг. 1



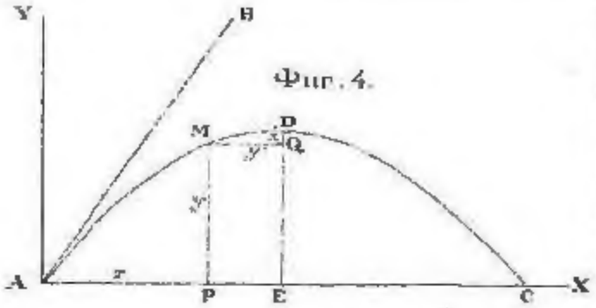
Фиг. 2.



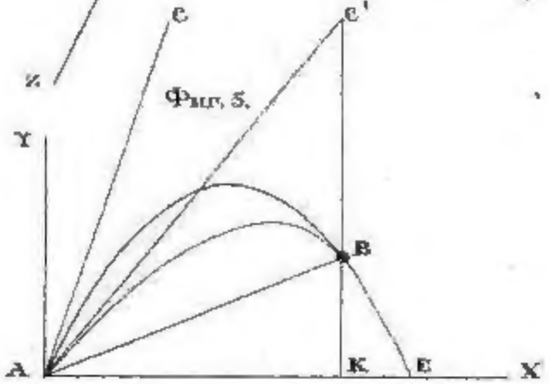
Фиг. 3.



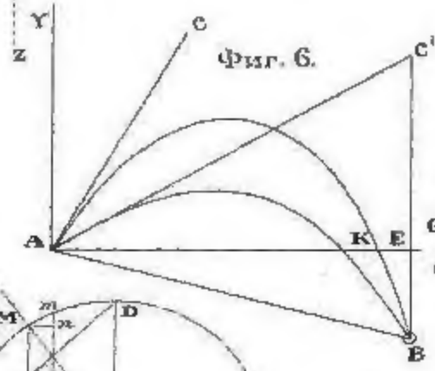
Фиг. 4.



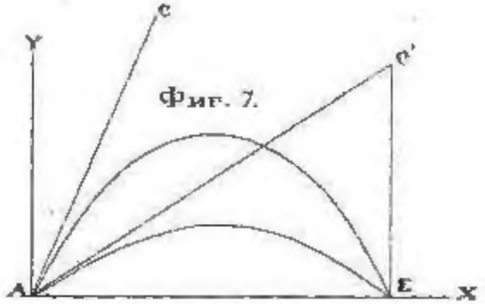
Фиг. 5.



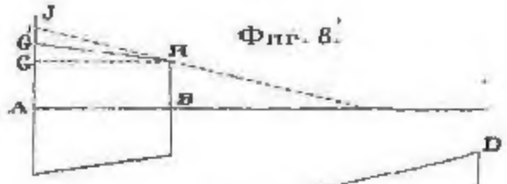
Фиг. 6.



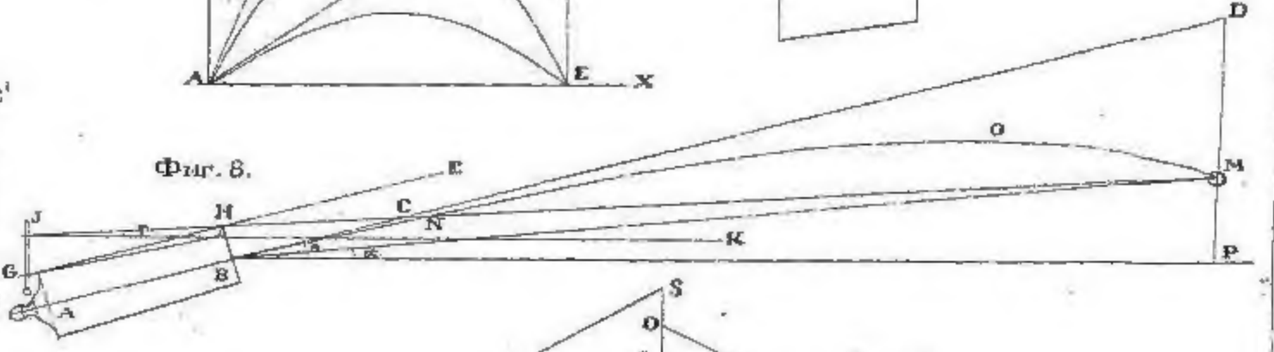
Фиг. 7.



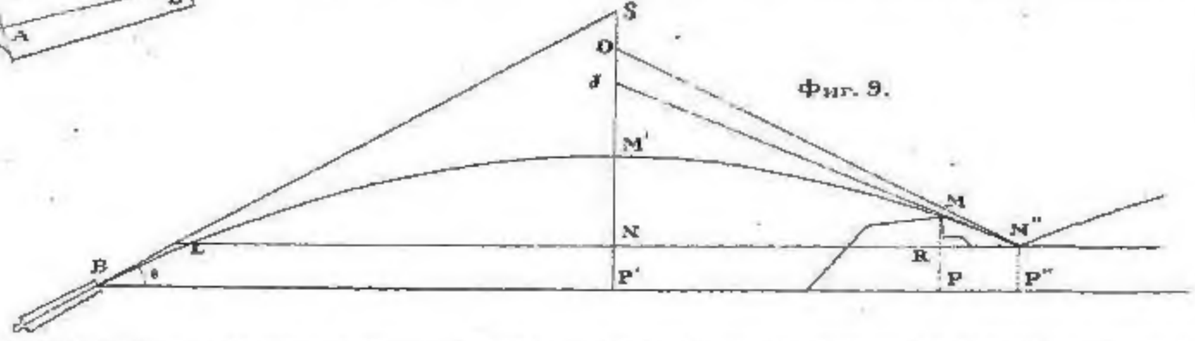
Фиг. 8'.



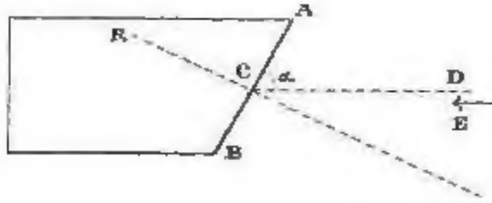
Фиг. 8.



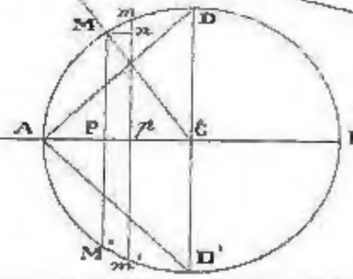
Фиг. 9.



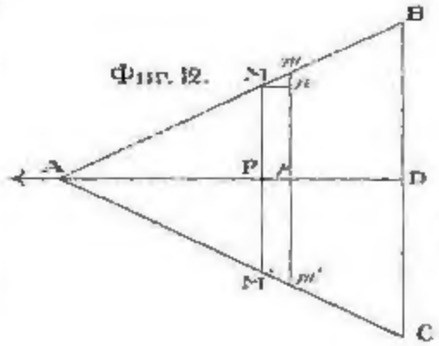
Фиг. 10.



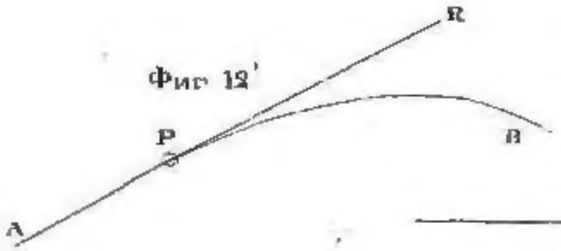
Фиг. 11.



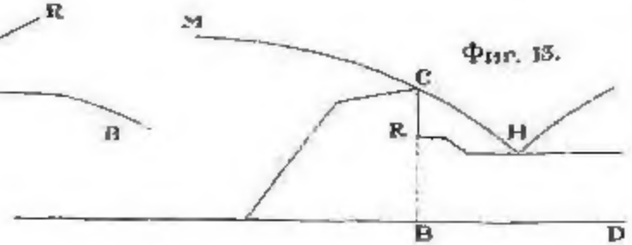
Фиг. 12.



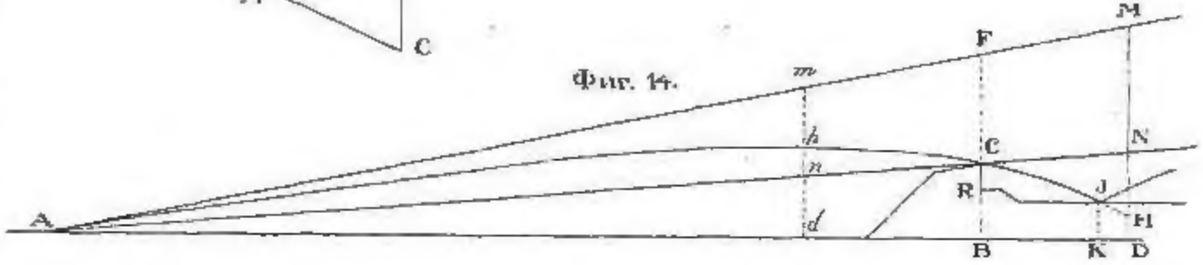
Фиг. 12'



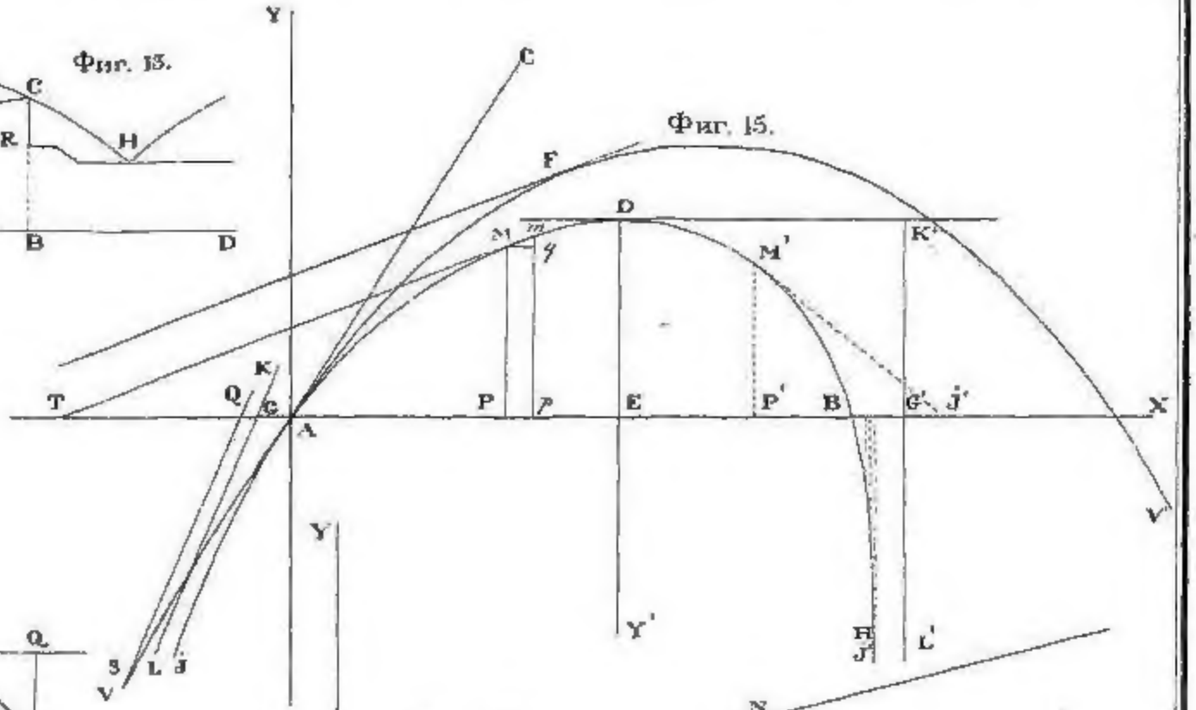
Фиг. 13.



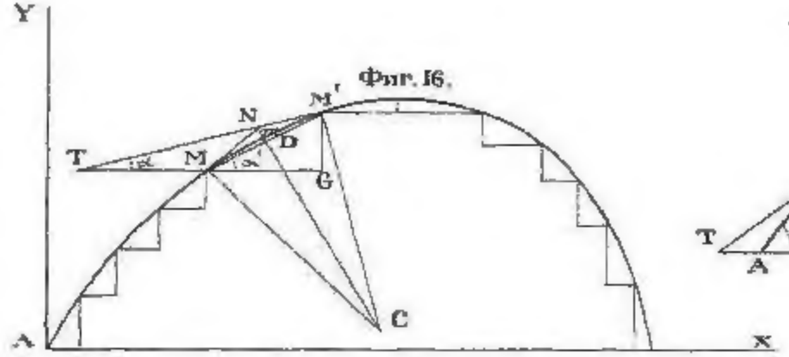
Фиг. 14.



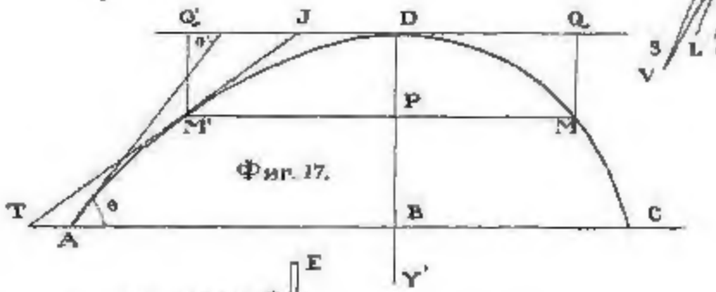
Фиг. 15.



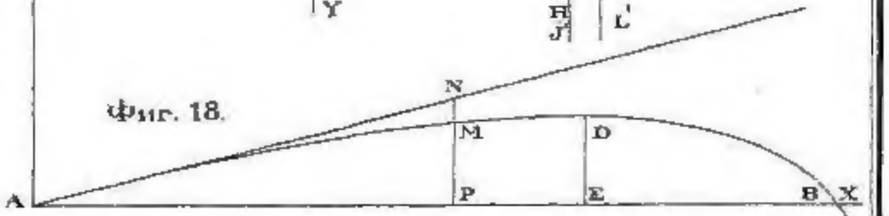
Фиг. 16.



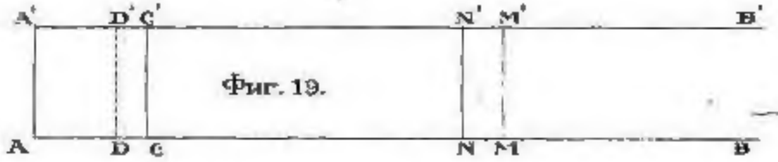
Фиг. 17.



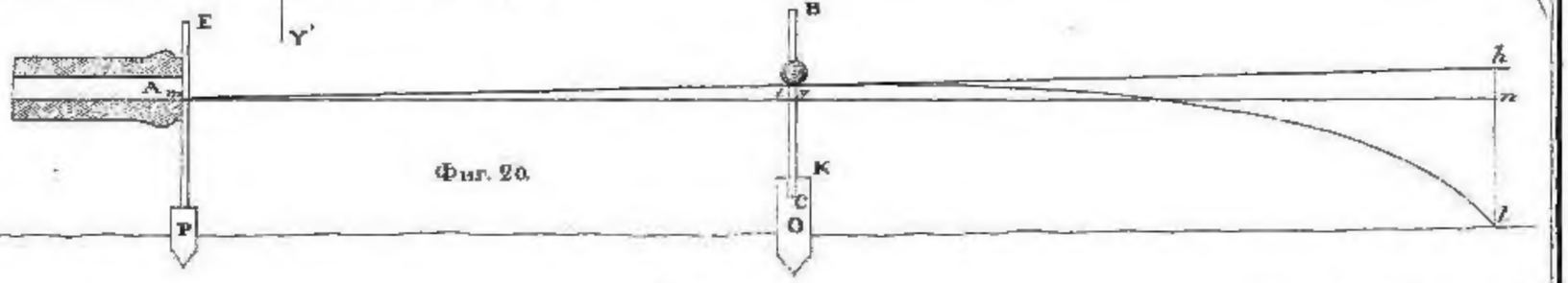
Фиг. 18.

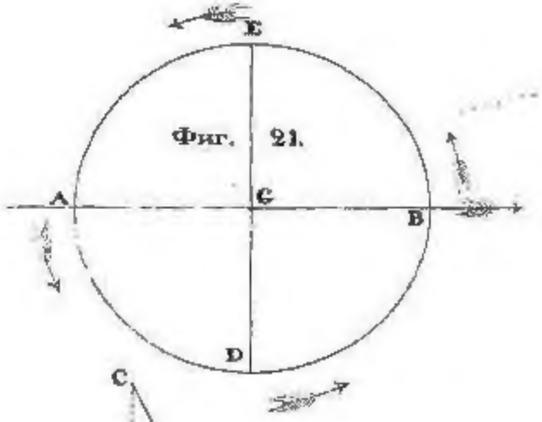


Фиг. 19.



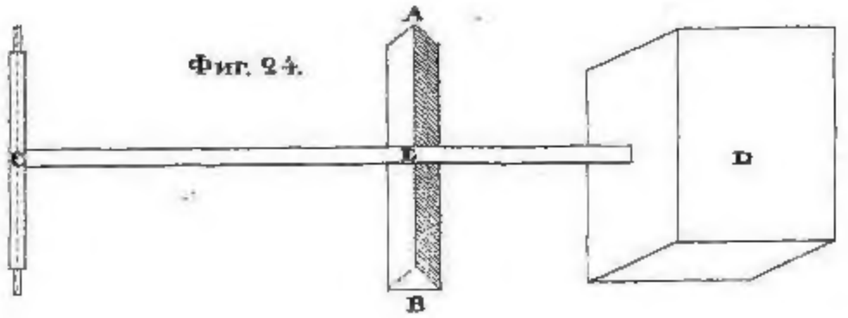
Фиг. 20.



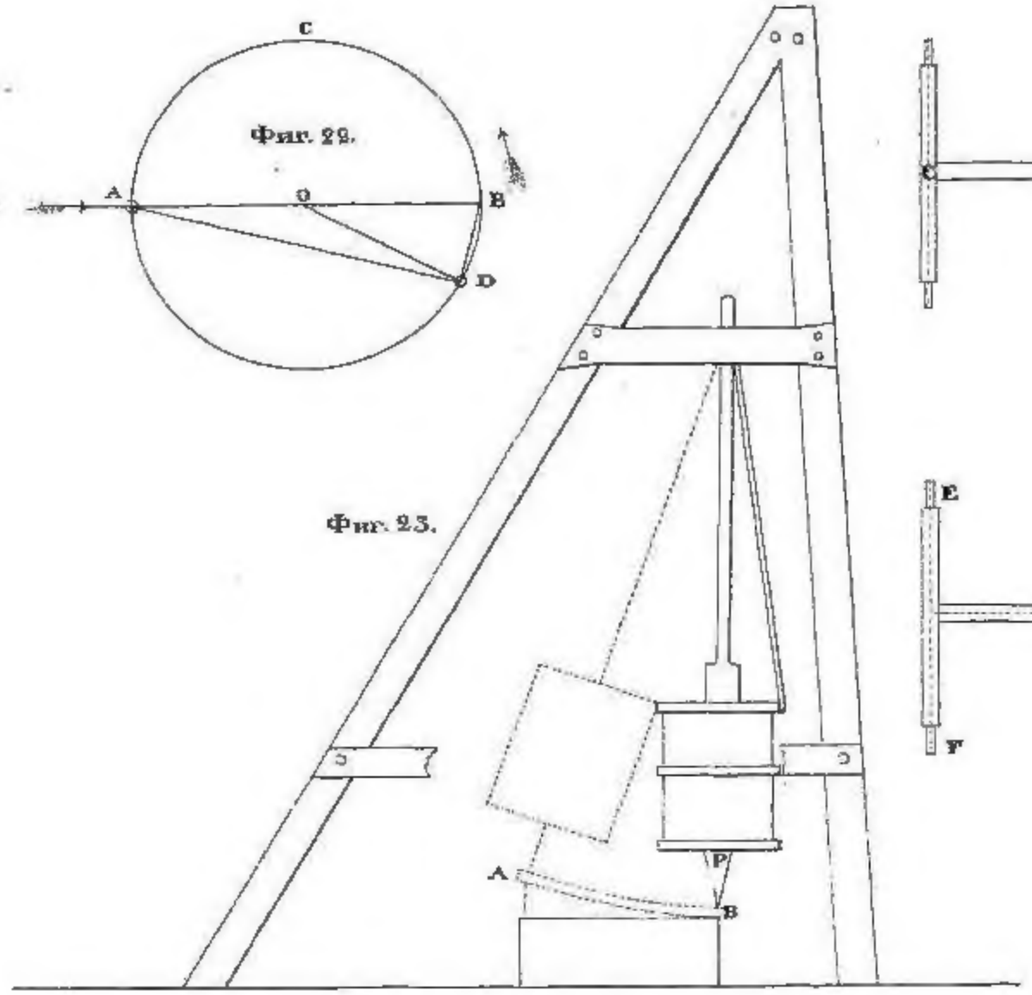


Фиг. 21.

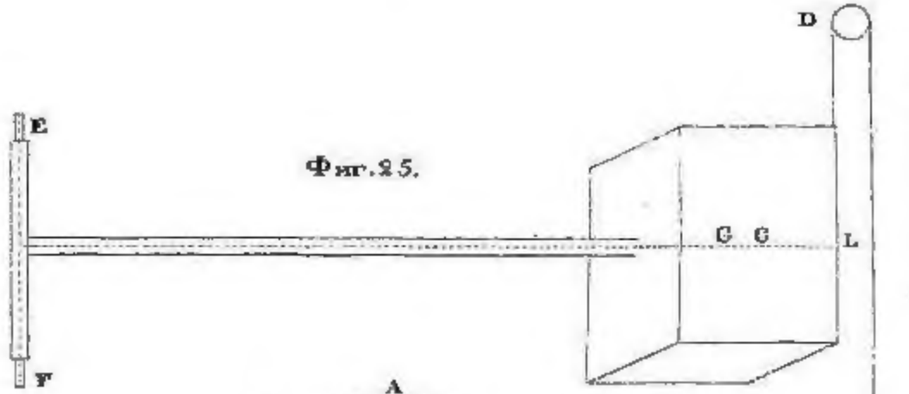
Фиг. 22.



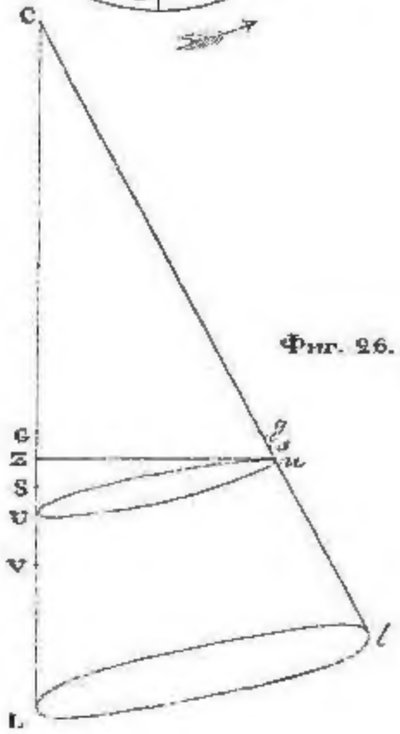
Фиг. 24.



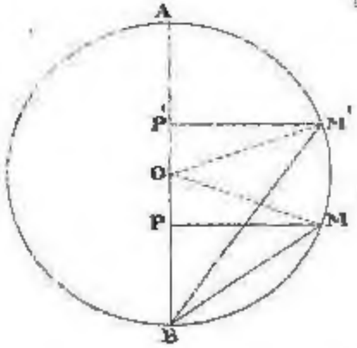
Фиг. 23.



Фиг. 25.



Фиг. 26.



Фиг. 27.